بناخ Banach ومجهره لإيجاد النقاط الصامدة

بقلم : كرستيان روسو **Christiane Rousseau**

ترجمة : أسماء لكحل

في هذه المقالة القصيرة، سنكتشف اعتمادا على لعبة صغيرة، إحدى أقوى نظريات الرياضيات، وهي نظرية النقطة الصامدة لبناخ Banach. لهذه النظرية تطبيقات رائعة سواء في الرياضيات أو في ميادين أخرى. سنقدم في الجزء الثالث من هذه المقالة تطبيقا رائعا مقتبسا من موضوع ضغط الصورة.

لكن دعنا نبدأ بلعبتنا، ولننظر عن كثب لغطاء علبة من الجبن المعروف باسم "البقرة الضاحكة".

نلاحظ أن قرط الأذن اليمنى للبقرة هو أيضا علبة من جبن "البقرة الضاحكة". نستطيع أن نصل كل نقطة من الغطاء بالنقطة الموافقة لها على قرط الأذن اليمنى. وبذلك نحصل بصفة واضحة على تطبيق، نرمز إليه بـــ F، من الغطاء نحو الغطاء نفسه. فعلى سبيل المثال، يمكننا وصل طرف ذقن البقرة بطرف ذقن البقرة الصغيرة المرسومة على القرط. كما يمكننا وصل مركز العين اليمنى للبقرة بمركز العين اليمنى للبقرة الصغيرة المرسومة على القرط، إلخ. وها هو السؤال الذي نطرحه الآن : **هل توجد بهذه الكيفية نقطة تكون صورة نفسها عبر هذا التطبيق؟** تسمى نقطة كهذه –إن وجدت– نقطة صامدة. إذا وجدت نقطة صامدة فلن تكون مطابقة لإحدى النقطتين اللتين ورد ذكرهما آنفا. وفضلا عن ذلك، إذا وجدت نقطة صامدة فيجب أن تكون في قرط الأذن اليمنى. غير أن هذا القرط للأذن اليمنى له صورة على قرط أذن البقرة الصغيرة، إلخ. بالعين، يمكن أن نتوقع بأن هذه الأقراط المتداخلة للآذان اليمنى ستبدو متقاربة نحو نقطة، نرمز إليها بـــ A. هذه النقطة مرشحة لتكون النقطة الصامدة التي نسعى إليها.

فلننطلق الآن من نقطة كيفية، مثلا طرف ذقن البقرة، ولنرمز إليه بـــ P_0. نرمز بـــ P_1 لصورة P_0، أي $P_1 = F\left(P_0\right)$. تقع النقطة P_1 في طرف ذقن البقرة الصغيرة على قرط الأذن اليمنى.

ثم نرمز بـــ P_2 لصورة P_1 عبر التطبيق F، أي $P_2 = F(P_1)$. تمثل P_2 طرف ذقن بقرة قرط الأذن اليمنى للبقرة الصغيرة، إلخ. نلاحظ هنا ثلاثة أمور :

1. نستطيع تكرار هذه العملية لانهائيا وبذلك ننشئ متتالية $\{P_n\}$ حيث نضع : $P_{n+1} = F(P_n)$.
2. بالعين، يمكن أن ندرك في عناصر هذه المتتالية أن هناك عددا منتهيا من النقاط تبدو مختلفة مثنى مثنى. أما باقي النقاط فلا يمكن التمييز بينها. وبطبيعة الحال يمكن تكبير الصورة ورؤية نقاط أكثر، ولكن مهما بلغت قوة التكبير فلن نميّز إلا بين عدد منته من النقاط، وستكون نقاط المتتالية المتبقية كأنها متراكبة فوق بعضها البعض.
3. تبدو هذه المتتالية أنها تتقارب نحو النقطة A المعرفة أعلاه.

لو اعتبرنا نقطة أخرى Q_0 بدل P_0 وأنشأنا المتتالية $\{Q_n\}$، بوضع $Q_{n+1} = F(Q_n)$، لبدت لنا هذه المتتالية أنها تتقارب أيضا نحو النقطة A. والواقع أننا نستطيع رؤية أن ذلك يرجع إلى كون المجموعة الوحيدة العنصر $\{A\}$ تمثل تقاطع جميع أقراط الآذان المتداخلة، والتي قطرها يؤول إلى الصفر.

ماذا ستقول لنا نظرية النقطة الصامدة لبناخ؟ ستقول : إن لـــ F نقطة صامدة وحيدة، بمعنى أنه توجد نقطة وحيدة A في المستوي تحقق $F(A) = A$. وزيادة على ذلك، ستنص النظرية على أنه إذا اعتبرنا نقطة كيفية P_0 وأنشأنا متتالية $\{P_n\}$، بوضع $P_{n+1} = F(P_n)$ فإن المتتالية ستتقارب نحو A.

لماذا؟ هل يمكن أن يحدث ذلك مهما كان التطبيق (الدالة) F؟ بطبيعة الحال، الجواب : لا. فعلى سبيل المثال، نلاحظ أن الانسحاب في المستوي لا يقبل نقطة صامدة. كما أن للدالة $G(x,y) = \left(x + \left(x^2 - 1\right), y\right)$ نقطتين صامدتين، هما $(\pm 1, 0)$. إن التطبيق F الذي اعتبرناه في لعبتنا يتمتع بخاصية متميزة. هي "التقلص". بمعنى أن صورة التطبيق F أصغر من مجموعة تعريفها : إذا كانت هناك مسافة تفصل نقطتين P و Q فإن المسافة التي تفصل صورتيهما $F(P)$ و $F(Q)$ ستكون أصغر من المسافة بين P و Q. لهذا الكلام معنى لأننا نستطيع حساب المسافة بين نقطتين من $\mathbb{R}^2$ إذ أن $\mathbb{R}^2$ فضاء متري. أما تقلص F فهو يضمن لنا، عند إنشاء متتالية كيفية $\{P_n\}$، أن تكون عناصرها انطلاقا من رتبة معينة N كأنها نقطة واحدة من أجل $N \leq n$، وهذا مهما كانت الخلفية التي ننظر من خلالها لهذه المتتالية (أي النظر عن بعد، أو عن قرب، أو عبر مجهر، أو حتى عبر مجهر إلكتروني). يكون عنصران متمايزان إذا كانت المسافة التي تفصلهما أكبر من عتبة معينة. سنرى في البند الموالي أن المتتالية التي تتمتع بهذه الخاصية تسمى متتالية كوشية Cauchy. في $\mathbb{R}^2$ كل متتالية كوشية متتالية متقاربة. لذا نقول إن $\mathbb{R}^2$ فضاء متري تام.

1. نظرية النقطة الصامدة لبناخ

لدينا الآن كل المستلزمات التي تتطلبها الحالة العامة، وبإمكاننا تقديم النظرية.

نظرية (النقطة الصامدة لبناخ). ليكن K فضاء متريا تاما نرمز فيه للمسافة بين نقطتين P و Q بـــ $d\left(Q,P\right)$. وليكن $F:K\to K$ تقلصا، أي أنه يوجد $c\in\left]0,1\right[$ بحيث تتحقق المتباينة التالية من أجل كل عنصرين P و Q :

$$d\left(F\left(P\right),F\left(Q\right)\right)\le cd\left(P,Q\right).$$

عندئذ تكون لـــ F نقطة صامدة وحيدة، أي أنه توجد نقطة وحيدة $A\in K$ بحيث $F\left(A\right)=A$.

سوف نقوم بتعريف كل مصطلح يظهر في هذا النص. يعتبر هذا الجزء نظريا ولذا يمكنكم المرور عليه مرور الكرام إذا كنتم تفضلون التركيز على التطبيقات الخلابة لهذه النظرية.

نحن نعلم ما هي المسافة بين نقطتين P و Q في $\mathbb{R}^2$. كيف يمكننا أن نعممها على مجموعة K؟

تعريف : المسافة على مجموعة K هي تطبيق معرف بـــ: $d:K\times K\to\mathbb{R}^2$ يحقق:

1. من أجل كل P و Q من K: $d\left(P,Q\right)\ge 0$؛
2. $d\left(P,Q\right)=0$ إذا وفقط إذا $P=Q$؛
3. من أجل كل P و Q و R من K : $d\left(P,Q\right)\le d\left(P,R\right)+d\left(R,Q\right)$ (المتباينة المثلثية).

نعلم أن هذه الخصائص تحققها المسافة الإقليدية العادية في $\mathbb{R}^2$.

نقوم الآن بتعريف متتالية كوشية، والتي تعبّر عن مفهوم متتالية تتوفر فيها الخاصية التالية : مهما بلغت عتبة الدقة التي نختارها، فبَعد عدد منته من العناصر، فإن كل العناصر الموالية غير متمايزة. لنذكّر أيضا بتعريف المتتالية المتقاربة.

تعريف : تكون متتالية $\{P_n\}$ متتالية كوشية في فضاء متري K إذا تحقق ما يلي

من أجل كل $\varepsilon\ge 0$، يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث مهما يكن $n,m\ge N$ فإن

$$d\left(P_n,Q_m\right)\le\varepsilon.$$

تتقارب متتالية $\{P_n\}$ في فضاء متري K نحو نهاية $A\in K$ إذا كان : من أجل كل $\varepsilon\ge 0$، يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث مهما يكن $n\ge N$ فإن

$$d\left(P_n,A\right)\le\varepsilon.$$

تعريف : يكون فضاء متري K تاما إذا كانت كل متتالية كوشية $\{P_n\}$ لعناصر من الفضاء K متقاربة نحو عنصر A ينتمي إلى K.

كيف نستطيع إثبات نظرية النقطة الصامدة لبناخ؟ برهان وحدانية النقطة الصامدة بسيط. لرؤية ذلك نفرض أن A و B نقطتان صامدتان. إذن $F(A)=A$ و $F(B)=B$. زيادة على ذلك فإن F تقلص، أي

$$d\left(F(A),F(B)\right)\leq cd(A,B).$$

ومن ثمّ $d(A,B)\leq cd(A,B)$. ومنه نجد في الأخير أن الحل الوحيد هو $d(A,B)=0$، أي أن $A=B$.

كما أن فكرة البرهان على الوجود بسيطة أيضا : لقد صادفناها سابقا في لعبتنا مع البقرة الضاحكة! لتكن $P_0\in K$ نقطة كيفية، ولننشئ (كما في السابق) المتتالية $\{P_n\}$ حيث $P_{n+1}=F(P_n)$. بهذا الشكل تكون هذه المتتالية متتالية كوشية ونهايتها تكون نقطة صامدة. (بطبيعة الحال فإن إثبات هاتين القضيتين يتطلب جهدا، ولكننا سنهمل التفاصيل التقنية. والمهمّ هنا هو أن البرهان يظل نفسه في الحالة العامة لفضاء متري تام معقد أو في حالة $K=\mathbb{R}$.)

إن فكرة البرهان ليست بسيطة وحدسية فحسب بل هي أيضا قوية جدا. ذلك لأنها توفر لنا طريقة لإنشاء النقطة الصامدة A إنشاءً عدديا. هذا ما يبيّن أن العديد من التطبيقات لهذه النظرية يمكن أن نجدها في الجانب النظري كما في الجانب التطبيقي.

2. التطبيقات في التحليل

إن أحد أهم التطبيقات المجردة لنظرية النقطة الصامدة لبناخ هي البرهان على وجود ووحدانية حلول معادلات تفاضلية مصقولة بكفاية. في هذا التطبيق، يكون الفضاء التام K هو مجموعة من الدوال، والدالة F تحوّل دالة إلى أخرى (نقول غالبا إن F مؤثر). والحيلة تكمن في إثبات أن حل المعادلة التفاضلية، إن وجد، هو حتما النقطة الصامدة للمؤثر F.

ربما درستم معادلات تفاضلية بسيطة، وتعلمتم بعض الحيل لإيجاد صيغ حلولها. تمثل تلك المعادلات التفاضلية استثناءً، إذ أن جلّ المعادلات التفاضلية لا تتوفر فيها صيغ لحلولها. وهنا تكمن أهمية توفر نظرية تؤكد وجود ووحدانية الحل. لا ينبغي أن نتفاجأ باستحالة توفير صيغ لكل حلول معظم المعادلات التفاضلية. لتوضيح ذلك دعنا نعتبر المعادلة البسيطة التالية:

$$Y'=e^{-x^2}.$$

إن حلها معطى بـــ :

$$Y=\int e^{-x^2}dx.$$

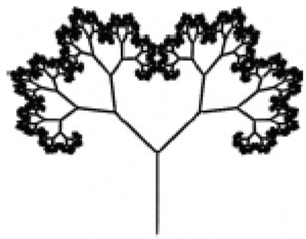
قد تتذكرون دروسكم في الاحتمالات والإحصاء، إذ تعلمتم أنه لا توجد دالة أصلية (صريحة العبارة) للدالة e^{-x^2}. وهذا ما يؤدي بنا إلى استعمال جداول عندما ندرس قانون غاوس Gauss (أو التوزيع الطبيعي).

3. تطبيق لضغط الصور

أحسن وسيلة لحفظ صورة هو تسجيل لون كل عنصور (بيكسل pixel). هناك مشكلتان في هذه الطريقة :

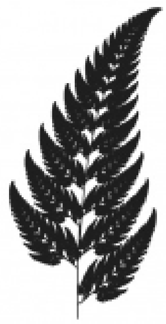
- أولا : تتوجب كمية هائلة من الذاكرة.
- ثانيا : إذا حاولنا تكبير الصورة، مثلا باستعمال ملصقة كبيرة تصبح هذه العنصورات مربعات كبيرة، ولن تكون لدينا معلومات كافية لاستكمال تفاصيل هذه المربعات.

ما هو مبدأ ضغط الصور؟ هو تشفير كمية معلومات أقل مما هو موجود في الصورة الأصلية. ولكن ذلك ينبغي أن يتم بطريقة ذكية بحيث لا تشعر العين بأن الصورة التي تشاهدها صورة مشوّهة. وقد زادت الإنترنت في حاجتنا إلى إيجاد سبل جيدة لضغط الصور. ذلك أن الصور تخفض كثيرا سرعة التصفح في شبكة الإنترنت.

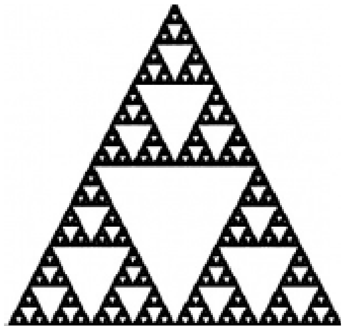


وهكذا فإن الإبحار على الشبكة يُوجب وجود صور مشفرة في ملفات صغيرة بقدر الإمكان. عندما تشاهدون هذه الصورة على شاشة حاسوبكم لا يمكنكم ملاحظة أنها قد شوّهت. ولكن إذا حاولتم تكبيرها أو طبعها على ملصقات فستلاحظون بسرعة أنها ذات نوعية سيئة.

هناك عدة كيفيات لضغط الصور، وأشهرها والتي صارت أكثر استعمالا في الصور الرقمية هي تلك المعروفة باسم JPEG. يعتبر تشفير صورة بشكل JPEG أيضا خوارزمية رياضية.



في هذه المقالة القصيرة سوف نركز على طريقة أخرى، والتي ظلت تجريبية أكثر من سواها. سميت هذه الكيفية، المكتشفة من قبل بارنسلي Barnsley، "نظام الدوال المتكررة". والفكرة التي تعتمد عليها هذه الطريقة هي الاقتراب من الصورة من خلال أشكال هندسية. وحتى تتوفر لدينا أشكال بعدد كاف فلن نقتصر على الكائنات الهندسية المعتادة، كالمستقيمات والمنحنيات، بل سنستعمل أيضا أشكالا أخرى مثل السرخس (fern) أو بساط سيربينسكي Sierpiński (انظر الشكل على اليمين).



سوف نشرح الفكرة التي تستند إليها كيفية ضغط الصور باعتبار بساط سيربينسكي (انظر الشكل على اليمين)، يظهر لأول وهلة معقدًا. كيف نخزنه في ذاكرة الحاسوب بطريقة اقتصادية؟ الأفضل تثبيت برنامج يعيد تركيبه عندما نحتاجه.

ولإنشاء هذا البرنامج ينبغي أن ندرك ما يميّز هذا الشكل الهندسي. نلاحظ أن بساط سيربينسكي إتحاد لثلاثة أبسطة سيربينسكية (أي ثلاث نسخ من ذات البساط)، وهي أصغر منه بمرتين (في الطول والإرتفاع). لرؤية ذلك، ننطلق من بساط سيربينسكي وعندئذ نستطيع أن نشكل بساطا آخر بالطريقة التالية:

- نختزل بساط سيربينسكي إلى النصف إنطلاقا من الرأس الأسفل الأيسر.
- نصنع صورة طبق الأصل لهذا النصف من بساط سيربينسكي، ثم نلصقه على يمين البساط الأول.
- نصنع صورة ثالثة لهذا النصف من بساط سيربينسكي ونلصقه فوق البساطين الآخرين.

الشكل الثاني المصنوع مطابق لبساط سيربينسكي الذي انطلقنا منه في البداية. وبالتالي فبساط سيربينسكي نقطة صامدة لهذه الكيفية.

لنعبّر عن ذلك بألفاظ رياضية. نلاحظ أن قاعدة بساط سيربينسكي تساوي ارتفاعه. لذا يمكننا أن نرسم معْلمًا مركزه في الرأس الأسفل الأيسر لبساط سيربينسكي، نختار وحدتيْ محوريْه بحيث يكون طول كل من الارتفاع والقاعدة يساوي 1. ثم ننشئ أيضا التحويلات التآلفية التالية المعرفة على $\mathbb{R}^2$ بـــ:

$$T_1(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right),$$
$$T_2(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\frac{y}{2}\right),$$
$$T_3(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4},\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

إذا كان S هو البساط سيربينسكي فإن

$$S=T_1(S)\cup T_2(S)\cup T_3(S).$$

هل توجد مجموعات جزئية أخرى B من المستوي تتمتع بنفس الخاصية، أي

$$B=T_1(B)\cup T_2(B)\cup T_3(B)? \qquad (1)$$

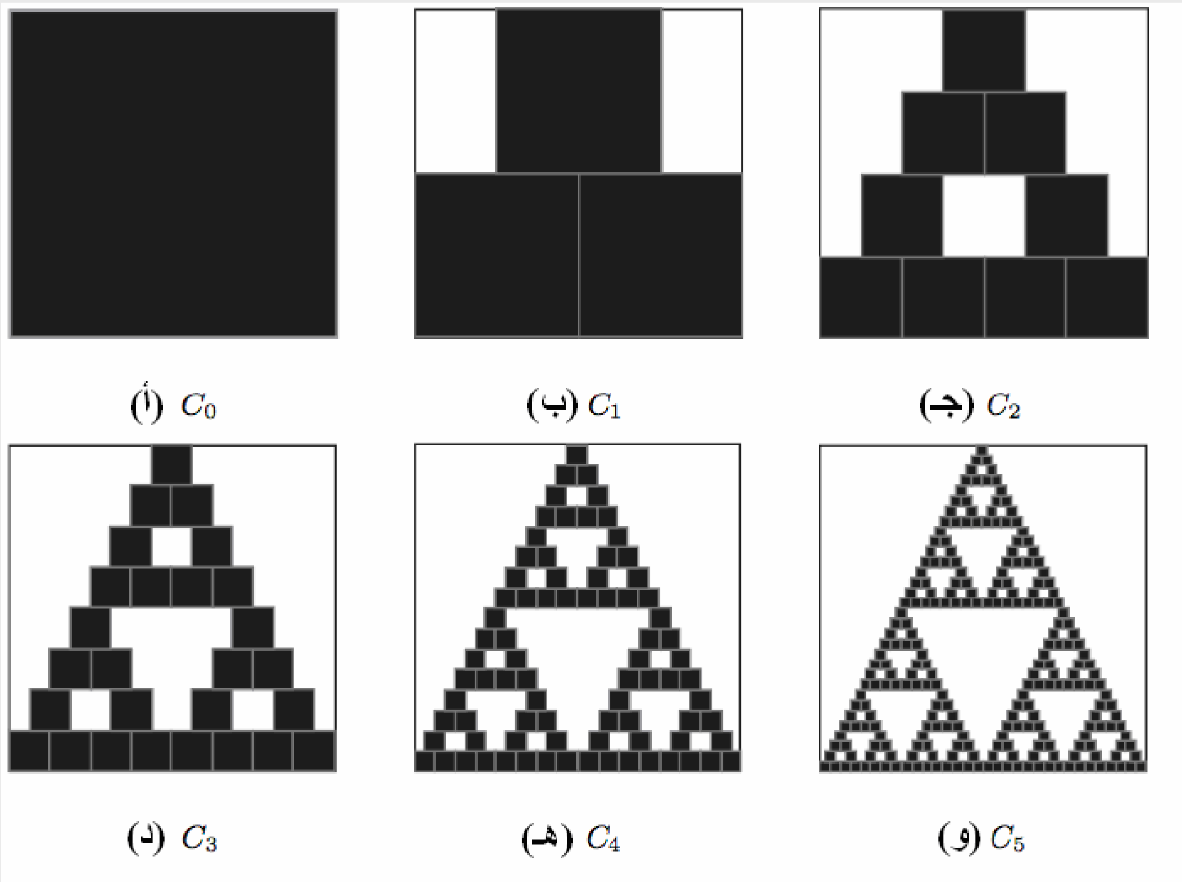
سنقوم بإجراء تجربة وندرك أن الجواب سيكون بالنفي! وبذلك نكون عندئذ قد ميّزنا بساطنا السيربينسكي بكونه يمثل المجموعة الجزئية الوحيدة B من المستوي التي تحقق العلاقة (1). ماذا

فعلنا؟ لقد أنشأنا دالة ترفق بمجموعة جزئية B من المستوي المجموعة الجزئية $T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)$ من المستوي. نسمي هذه الدالة W. إنها معرفّة كما يلي :

$$B \mapsto W(B) = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B). \qquad (2)$$

ونحن نعلم أن $S = W(S)$، بمعنى أن S نقطة صامدة لهذه الدالة.

لقد قلنا إننا سنقوم بتجربة لنتثبت أن بساط سيربينسكي هو النقطة الصامدة الوحيدة للدالة. دعنا نجرب ذلك بمربع C_0 كما في الشكل1 (أ). صورة هذا المربع هو C_1 (الشكل 1 (ب)). نطبق نفس الطريقة على C_1 فنتحصل على C_2 ، $C_3 - C_5$ (الشكل 1 ((جـ)-(و)).



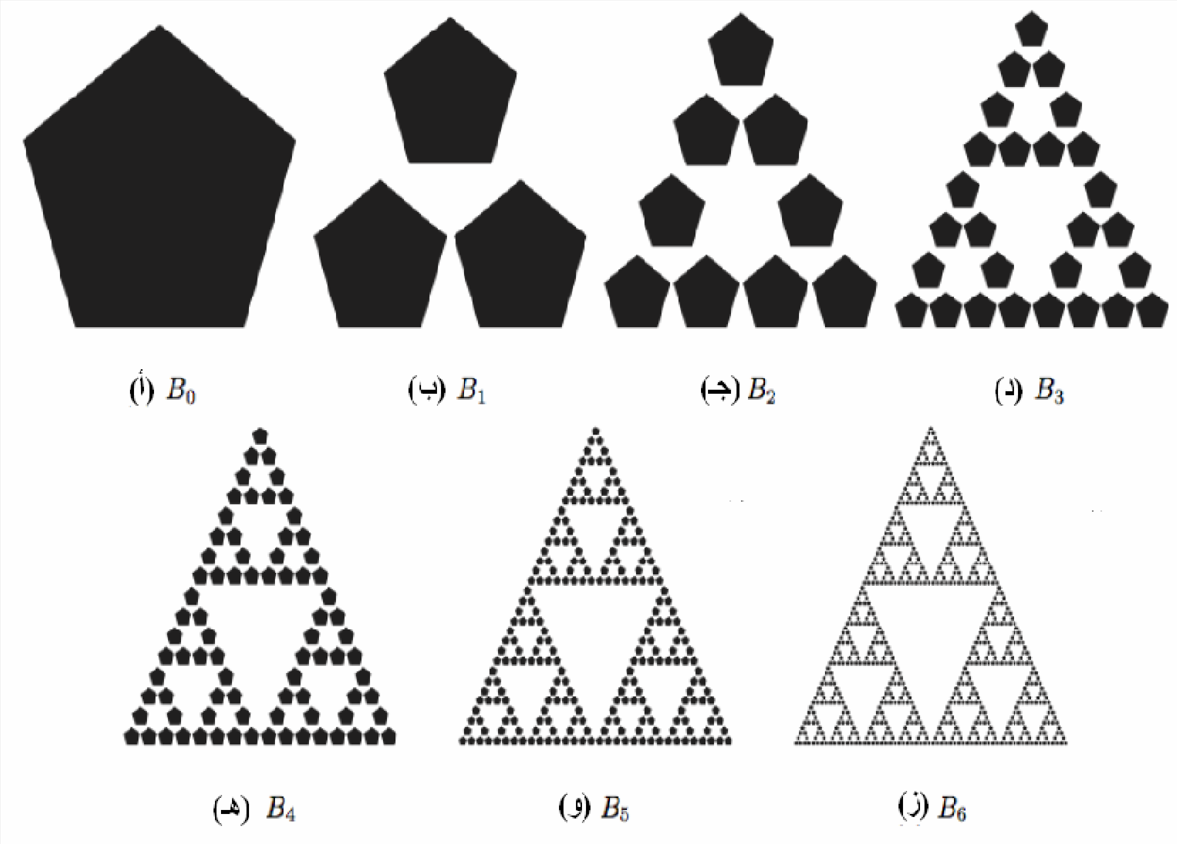
الشكل 1

نلاحظ هنا ثلاثة أمور:

1. ليس هناك من الأشكال C_0،...، C_5 ما يمثل نقطة صامدة للدالة W.
2. نستطيع مواصلة العمل بهذه الكيفية لانهائيا، والحصول عندئذ على متتالية غير منتهية من المجموعات $\{C_n\}$، حيث $C_{n+1} = W(C_n)$.
3. يظهر أن المتتالية $\{C_n\}$ تتقارب بسرعة نحو بساط سيربينسكي. بالفعل، لا يمكن لأعيننا أن تميّز C_{10} من S. إذن، في مكان S على صورتنا، يمكن لبرنامج إعادة الإنشاء أن ينشئ

بكل بساطة C_{10}. وإذا كان من الضروري اختيار ميْز آخر فسوف نستعمل نفس البرنامج ونطلب منه أن يتوقف عند C_{20} أو C_{30}. وهكذا فنفس البرنامج الصغير يستطيع إعادة إنشاء S بأية دقة نريد!

إضافة إلى ذلك نستطيع إعادة القيام بهذه التجربة والتأكد من أن الطريقة صالحة مهما كان الشكل الذي ننطلق منه! هناك مثال ثان لمضلع خماسي موضح في الشكل 2. ونفس الملاحظات 1، 2 و3 الواردة أعلاه تظل قائمة أيضا في هذا المثال.



الشكل 2

لقد رأينا أن نظرية النقطة الصامدة لبناخ تنطبق على التقلصات في الفضاءات المترية التامة. في العنوان 2 السابق عرّفنا الدالة W على الفضاءات الجزئية للمستوي. بالنسبة للفضاء المتري سوف نختار K مجموعة المجموعات الجزئية (المغلقة) المحدودة للمستوي. وسندخل مسافة على K ونسميها مسافة هوسدورف Hausdorff. إن تعريف مسافة هوسدورف $d_H\left(B_1,B_2\right)$ بين مجموعتين جزئيتين B_1 و B_2 يُعْطى بصيغة غامضة ومعقدة. دعنا نشرح هذا المفهوم بطريقة مختلفة. نبدأ بشرح ما نعني بـ

$$d_H\left(B_1,B_2\right)\le\varepsilon$$

(حتى ولو لم نعرّف ما نعنيه بـــ $d_H\left(B_1,B_2\right)$!). هذا يعني أنه إذا كان مقدار دقة نظرنـــا يعـــادل ε، فإننا لا نستطيع أن نميّز B_1 عن B_2. وباستخدام المصطلحات الرياضية فإن العلاقة $d_H\left(B_1,B_2\right)\le\varepsilon$ تعني

$$\begin{aligned}&\forall P\in B_1,\exists Q\in B_2,\ d\left(P,Q\right)\le\varepsilon\\&\forall P'\in B_2,\exists Q'\in B_1,\ d\left(P',Q'\right)\le\varepsilon\end{aligned}\qquad(3)$$

(هنا d هي المسافة الإقليدية العادية على $\mathbb{R}^2$.) هذا يسمح لنا بإعطاء التعريف غير المباشر التالي.

تعريف. مسافة هوسدورف بين مجموعتين مغلقتين ومحدودتين B_1 و B_2 هي أصغر القيم $0\le\varepsilon$ من بين تلك التي تحقق العلاقة (3).

نستطيع الآن التسليم بأن الدالة W تقلص. بالفعل، نفرض أن $d_H\left(B_1,B_2\right)\le\varepsilon$. عندئذ يمكــن إثبات العلاقة $d_H\left(W\left(B_1\right),W\left(B_2\right)\right)\le\frac{\varepsilon}{2}$.

ليكن $P\in W\left(B_1\right)$. يوجد $i\in\{1,2,3\}$ و $P_1\in B_1$ بحيث $P=T_i\left(P_1\right)$. بما أن $d_H\left(B_1,B_2\right)\le\varepsilon$ يوجد $Q_1\in B_2$ بحيث $d\left(P_1,Q_1\right)<\varepsilon$. ليكن $Q=T_i\left(Q_1\right)$. نستنتج أن $Q\in W\left(B_2\right)$ و

$$d\left(P,Q\right)=d\left(T_1\left(p_1\right),T_1\left(Q\right)_1\right)=\frac{1}{2}d\left(P_1,Q_1\right)\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

نصل إلى نفس النتيجة إن بدأنا بـــ $P'\in W\left(B_2\right)$. إذن يوجد $Q'\in W\left(B_1\right)$ بحيث $d\left(P',Q'\right)\le\frac{\varepsilon}{2}$.

لقد طبقت هذه الطريقة على ضغط صور حقيقية (أنظر المرجع [K] أو [RS]). وهـــي تنـــتج صورا عالية الجودة عندما تكون الصورة الأصلية ذات طابع كسوري. ولكن، درجة الـــضغط ليـــست مرنة وفعالة كما هو الحال في الشكل JPEG. وفضلا عن ذلك فكيفية التشفير (التي تحوّل الصورة إلى برنامج من المفروض أنه يعيد تكوينها) تبقى في كل الأحوال بالغة التعقيد وهو ما يحُول دون أن تكون لها فائدة عملية. ورغم ذلك فإن بساطة هذه الفكرة، بالنظر إلى قوتها، تظل رائعة ومغرية.

4. تطبيق مثير للخوارزمية: خوارزمية رتبة صفحة

إن نجاح غوغل Google كمحرك بحث يأتي من خوارزميته: خوارزمية "رتبة الصفحة" PageRank. في هذه الخوارزمية، نحسب نقطة صامدة لمؤثر خطي على $\mathbb{R}^n$ يمثل تقليصا، وهذه النقطة الصامدة (والتي هي شعاع) تولد ترتيب الصفحات. من الناحية العملية، فالنقطة الصامدة (التي هي شعاع ذاتي للقيمة الذاتية 1) تحسب بطريقة تقريبية بـــ P_n من أجل n كبير بكفاية. ندعو القارئ المهتم بهذا الموضوع الاطلاع على تفاصيل مقالة كلاين القصيرة المعنونة "*كيف يشتغل غوغل*".

5. خلاصة

رأينا في هذه المقالة كيف تمكنا، انطلاقا من لعبة بسيطة، إكتشاف أفكار قوية جدا والتي يمكن أن تقودنا إلى تطورات كبيرة في الرياضيات والتكنولوجيا. من الآن فصاعدا، عندما نبحث عن حل وحيد لمسألة معينة في جميع الميادين الرياضية، فمن الطبيعي أن نحاول رؤية ما إذا كان حل هذه المسألة يتميز بكونه النقطة الصامدة الوحيدة لمؤثر مبني خصيصا لهذا الهدف.

لقد لاحظنا أن ميزة هذه المقاربة هي أن النظرية تعطي طريقة فعالة وملموسة لبناء حل كنهاية متتالية لأن التقارب سريع.

إن التحليل هو دراسة الدوال. والدوال غالبا ما تُعَرّف على الأعداد. في التحليل المتعدد المتغيرات نعمم مفهوم الدالة إلى الأشعة التي هي عناصر من $\mathbb{R}^n$. ولكن لماذا التوقف عند عناصر من $\mathbb{R}^n$؟ لقد رأينا أيضا أن الرياضياتيين يحبون تعميم مفهوم الدوال، ويسمحون لأنفسهم بتعريفها، مثلا، على مجموعات متكوّنة من مجموعات، كمجموعة الدوال، إلخ. واليوم، صار التحليل الخاص بتناول مجموعات الدوال محورا مهمًا في التحليل المعاصر، المسمى *التحليل الدالي (أو التابعي)* الذي يعتبر موضوعا متداولا في الدراسات على مستوى الماستر.

ندعوكم إلى ربط هذا الموضوع بالكيفيات التكرارية التي صادفتموها. على سبيل المثال يتم الربط بالكيفيات المتكررة وحيدة البعد ذات الصلة بمتتاليات هيرون Heron للحصول على الجذور التربيعية. كما أن التقارب السريع للمتتاليات الهندسية يمكن أيضا أن يُفهم من وجهة النظر الموضحة في هذه المقالة.

6. المراجع

[B] M. F. Barnsley, Fractals everywhere, San Diego, Academic Press, 1988.

[K] J. Kominek, Advances in fractal compression for multimedia applications, Multimedia Systems Journal, vol. 5, n◦ 4, 1997, 255–270.

[R] C. Rousseau, Point fixe de Banach, Accromath 5, hiver-printemps 2010 (www.accromath.ca).

[R2] C. Rousseau, Comment Google fonctionne: chaînes de Markov et valeurs propres, Klein vignette (www.kleinproject.org).

[RS] C. Rousseau et Y. Saint-Aubin, Mathématiques et technologie, SUMAT Series, Springer-Verlag, 2008 .

تقاسم هذا على:

- Email
- طباعة
- Facebook
- Twitter

هذا المقال متوفر أيضا بـــ: الانجليزية، الفرنسية، الإسبانية، البرتغالية (البرازيلية).

أرسل الموضوع على شكل PDF أدخل عنوان البريد الإلكتروني ابعث

اترك تعقيبًا

بريدك الإلكتروني لن ينشر. الحقول المطلوبة مسجلة*

الاسم*

البريد الالكتروني*

الموقع الإلكترني

التعقيب

You may use these HTML tags and attributes: <a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>

أرسل التعقيب

☐ أشعروني بجديد التعقيبات على البريد الإلكتروني.

☐ أشعروني بالمقالات الجديدة عبر البريد الإلكتروني.