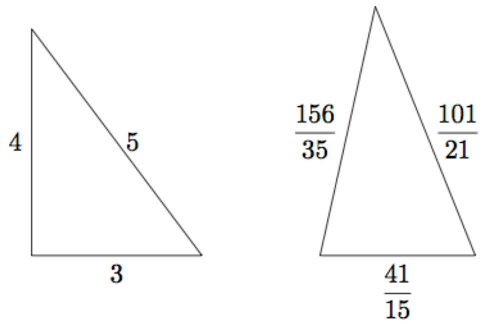
حكاية مثلثين: مثلثات هيرون و المنحنيات الناقصية

بقلم : ويليام ماك كالوم William Mc Callum

ترجمة: سارة لعزيلي



إذا كان لمثلثين نفس المساحة ونفس المحيط، فهل هما بالضرورة متقايسان ؟ الجواب سيكون بالنفي. فعلى سبيل المثال، المثلث الذي أطوال أضلاعه 3، 4 ، 5 له نفس مساحة ونفس محيط المثلث الذي أطوال أضلاعه $\frac{41}{15}$، $\frac{101}{21}$، $\frac{156}{35}$.

إن محيط كلٍّ من المثلثين يساوي 12:

$$\frac{41}{15}+\frac{101}{21}+\frac{156}{35}=\frac{287+505+468}{105}=\frac{1260}{105}=12 \quad \text{و} \quad 3+4+5=12$$

والمفاجأة هي أن للمثلثين نفس المساحة أيضا. فمساحة المثلث الأيسر قدرها $\frac{1}{2}4.3=6$. أما لإيجاد مساحة المثلث الآخر نستطيع استعمال علاقة هيرون[1] Heron التي تنص على أن المساحة A لمثلث أطوال أضلاعه a، b ، c هي

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ يمثل نصف محيط المثلث. بإجراء حسابات سريعة[2] بناء على هذه العلاقة ينتج أن مساحة المثلث الثاني تساوي 6.

فضاء المثلثات

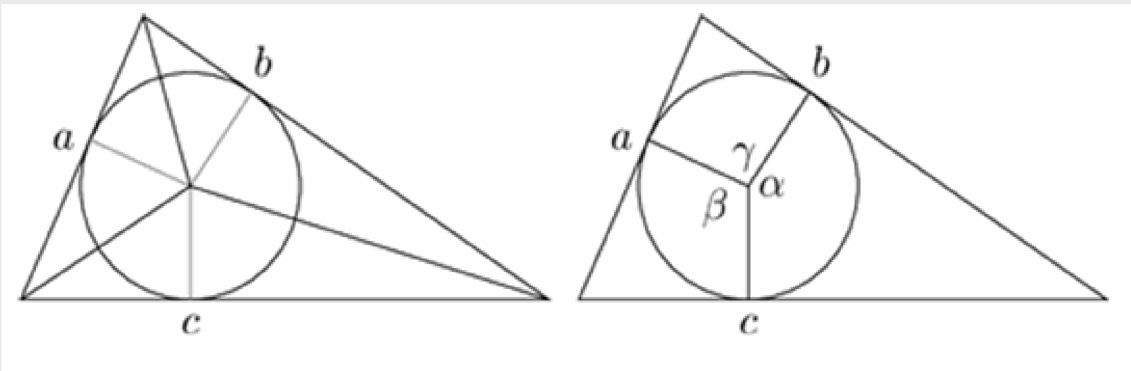
[1] هيرون الإسكندري: مهندس، ميكانيكي ورياضياتي يوناني من القرن 1م. بخصوص علاقة هيرون، انظر مثلا
http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B5%D9%8A%D8%BA%D8%A9_%D9%87%D9%8A%D8%B1%D9%88

[2] انظر
http://www.wolframalpha.com/input/?i=A+%3D+sqrt%286*%286-41%2F15%29*%286-101%2F21%29*%286-156%2F35%29%29

كيف يمكننا الحصول على أمثلة من هذه الشاكلة؟ يكمن السرّ في إيجاد أحسن طريقة لتمثيل فضاء يشمل كل المثلثات. وهناك عدة طرق للقيام بذلك. من بينها التعبير عن مثلث بواسطة ثلاثية مرتبة (a,b,c) تمثّل أطوال أضلاعه. ثم نمثل كل مثلث بنقطة في فضاء ثلاثي الأبعاد. هناك نقاط في الفضاء لا يمكن أن ترمز لمثلثات؛ فمثلا، يجب أن تكون كل الإحداثيات موجبة. هل يمكنكم إيجاد قيود أخرى؟

هناك طريقة ثانية لإرفاق الإحداثيات بفضاء المثلثات نستعمل فيها أقياس زواياها بدلا من أطوال أضلاعها. فلكل مثلث دائرة مُحاطة به، ونصف قطرها r له علاقة بسيطة بالمساحة A ونصف المحيط s، وهي $A = rs$.

للتحقق من هذا، نرسم المستقيمات العمودية على أضلاع المثلث المارة من مركز الدائرة، كما هو مبيّن في الرسم الأيمن من الشكل 2. هذه المستقيمات العمودية تشكل ارتفاعات لثلاث مثلثات صغيرة حيث قاعدة كل منها هي ضلع من أضلاع المثلث الأصلي، والرأس الثالث هو مركز الدائرة المحاطة بالمثلث. إن مجموع مساحات هذه المثلثات يعطينا $A = rs$.



الشكل 2 : تعيين فضاء المثلثات.

هذه المساواة تبيّن لنا أنه إذا كان لمثلثين نفس المساحة ونفس نصف المحيط، فإن نصفي قطري الدائرتين المحاطتين بهما متساويان. ومن ثمّ، إذا كنا نبحث عن مثل هذه المثلثات سنجدها ضمن المثلثات المحيطة بنفس الدائرة المعطاة. والآن، عوضا عن استعمال الأطوال لوصف هذه المثلثات، سنستعمل الزوايا المُشكلة بأنصاف الأقطار الثلاثة في مركز الدائرة المُحاطة. كما هو موضح في الرسم الأيمن من الشكل 2.

تعيين المثلثات ذات مساحة ومحيط ثابتين

في فضاء المثلثات يمكن إيجاد مجموعة متكاملة من المثلثات التي لها نفس قيم A و s.
في البداية نعبّر عن s بدلالة الزوايا α ، β ، γ ونصف القطر r للدائرة المحاطة بالمثلث، كما سيَلي: أنصاف الأقطار والمستقيمات التي تشمل رؤوس المثلث ومركز الدائرة تجزئ المثلث إلى ستة مثلثات قائمة. وبما أن المستقيمات المارة برؤوس المثلث ومركز الدائرة هي أيضا مُنصفات لزوايا

المثلث الأصلي فإن المثلثات القائمة الصغيرة تشكل ثلاثة أزواج من المثلثات المتقايسة مثنى مثنى. بأخذ أطوال الأضلاع المجاورة للزوايا القائمة في كل مثلث قائم وبالجمع، نجد

$$s = r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right).$$

تبيّن لنا هذه المعادلة والمساواة $A = rs$ أنه إذا كانت المساحة A ونصف المحيط s ثابتين فإن مجموع الظلال أدناه ثابت أيضا:

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{A}. \qquad (1)$$

ثم، نحوّل هذا الشرط إلى معادلة تعرّف منحني في المستوي. نضع $x = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$، $y = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$، $z = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. بما أن $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ فإن

$$\frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2},$$

و

$$z = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{x+y}{1-xy}.$$

وهكذا، إذا كان k هو الثابت $\frac{s^2}{A}$، تصبح المعادلة (1)، من أجل قيمة معطاة لـــ k

$$x + y - \frac{x+y}{1-xy} = k \qquad (2)$$

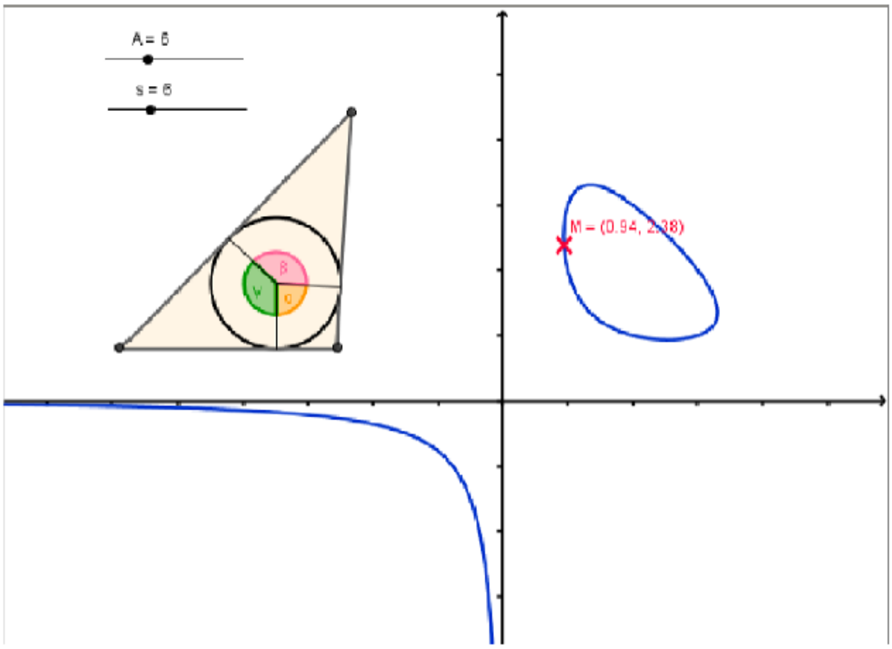
والتي نكتبها:

$$x^2 y + xy^2 = kxy - k. \qquad (3)$$

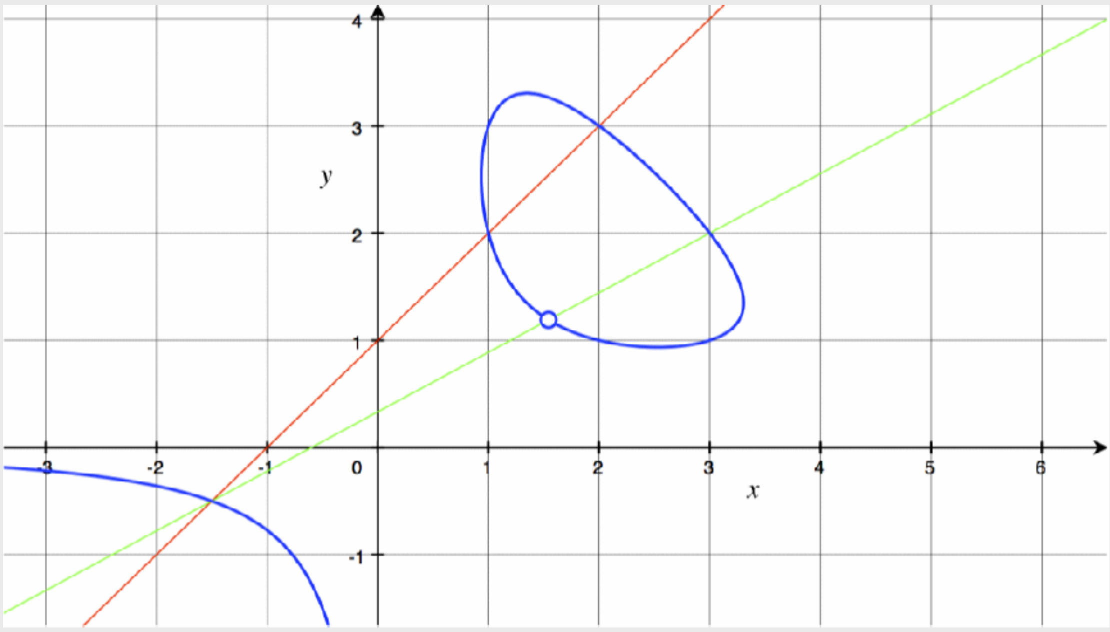
كل مثلث ذو مساحة A ونصف محيط s يعرّف نقطة على هذا المنحنى. كما أن كل نقطة من هذا الأخير تقع في جزء معين من المستوي توافق مثلثا. إنه الجزء الموافق للزوايا الموضحة في الشكل 2، أي الزوايا التي تحقق $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ و $\pi > \alpha, \beta, \gamma > 0$، والتي توافق المنطقة $x > 0$ ، $y > 0$ ، $xy > 1$ (لأن $z > 0$).

الشكل التالي هو تمثيل لهذا المنحنى في حالة $k = 6$، وهي القيمة الموافقة للمثلثات التي أطوال أضلاعها 3، 4 ، 5. كل نقطة من المركبة الواقعة في الربع العلوي الأيمن من المستوي، تمثل مثلثا أطوال أضلاعه $a = x + y$ ، $b = y + z$ ، $c = z + x$. بصفة خاصة كل من النقاط $(1,2)$ ، $(2,1)$ ، $(2,3)$ ، $(3,2)$ ، $(1,3)$ ، $(3,1)$ تمثل المثلث الذي أطوال أضلاعه 3 ، 4 ، 5 مختارة في ترتيب ما.

هذا الشكل تفاعلي: حاول تحريك النقطة M أو تغيير قيم المساحة أو نصف المحيط! عــذرا، إذا لــم ينطلق برنامج GeoGebra. من فضلك تأكد الآن (أو لاحقا) من أن Java 1.5 مثبت على جهازك.
إذا تم كل شيء على ما يرام فسيظهر لك هذا الشكل



إيجاد نقاط على المنحنى



الشكل 3 : منحنى يوضح المثلثات ذات المحيط 12 و المساحة 6.

بما أن البيان في الشكل 3 معرف بمعادلة كثير حدود من الدرجة الثالثة فإنه يمكن الحصول على نقاط منه باستعمال طريقة المماسات والقواطع[3]. فنقطتان من المنحنى تعرّفان قاطعا يقطع البيان

[3] انظر http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D9%86%D8%AD%D9%86%D9%89_%D8%A5%D9%87%D9%84%D9%8A%D9%84%D8%AC%D9%8A

في نقطة ثالثة. إن إيجاد هذه النقطة يعتمد على حل معادلة من الدرجة الثالثة ذات المجهول x، عُلم جذران لها. إن معرفتنا المسبقة بست نقاط من المنحنى تؤدي إلى وجود عدة إمكانيات للقواطع : فكلما زاد عدد النقط المختارة زاد عدد تلك الإمكانيات. في الواقع، المنحنى له عدد غير منته من النقاط ذات المركبات الناطقة. باستعمال طريقة القاطعين الموضحة في الشكل 3 نحصل على النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{25}{21},\frac{54}{35}\right)$ (المشار إليها بدائرة)، والتي توافق مثلثا أطوال أضلاعه $\frac{41}{15}$ و $\frac{101}{21}$ و $\frac{156}{35}$.

طريقة القواطع صالحة من أجل كل منحنى ناقصي (هذه المنحنيات ليست قطوعا ناقصية، لكنها سُمّيت بالمنحنيات الناقصية لأنها تظهر في دراسة صف دوال عُقَدية (مركبة) تعرف بالدوال الناقصية). فتسمح لنا طريقة القواطع بتعريف بنية زمرة على مجموعة النقاط الناطقة لمنحنى ناقصي (أي النقاط من المنحنى ذات المركبات الناطقة).

دراسة المنحنيات الناقصية موضوع محوري في نظرية الأعداد، له تطبيقات في طرق تشفير المعاملات المالية المؤمنة على الإنترنت. كما لعبت هذه المنحنيات دورا هاما في إثبات آخر نظريات فيرما Fermat.

يبيّن العرض المقدم في هذا المقال الوحدة المتينة التي تتحلى بها الرياضيات، إبتداءً من مسألة في مستوى تلاميذ المرحلة الثانوية ووصولا إلى مستوى الأبحاث التي تجرى في الجامعة. وخلال كل هذا واجهنا فكرة أساسية في الرياضيات الحديثة: هو حل مسألة ذات صلة بنوع من الكائنات (هي مثلا، مثلثات مساحتها 6 ومحيطها 12)، وذلك بوضع تلك الكائنات في فضاء أكثر شمولا (وهو فضاء كل المثلثات). وتم هذا بإيجاد أحسن طريقة لتعيين هذا الفضاء.

تقاسم هذا على:

- Email
- طباعة
- Facebook
- Twitter

هذا المقال متوفر أيضا بـــ: **الصينية المبسطة**، الانجليزية، الإيطالية، الإسبانية، برتغالية البرازيل.

أرسل الموضوع على شكل PDF

أدخل عنوان البريد الإلكتروني

ابعث

اترك تعقيبًا

بريدك الإلكتروني لن ينشر . الحقول المطلوبة مسجلة *

الاسم *

البريد الالكتروني *

الموقع الإلكتروني

التعقيب

You may use these HTML tags and attributes: `<a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>`

أرسل التعقيب

أشعروني بجديد التعقيبات على البريد الإلكتروني.

أشعروني بالمقالات الجديدة عبر البريد الإلكتروني.