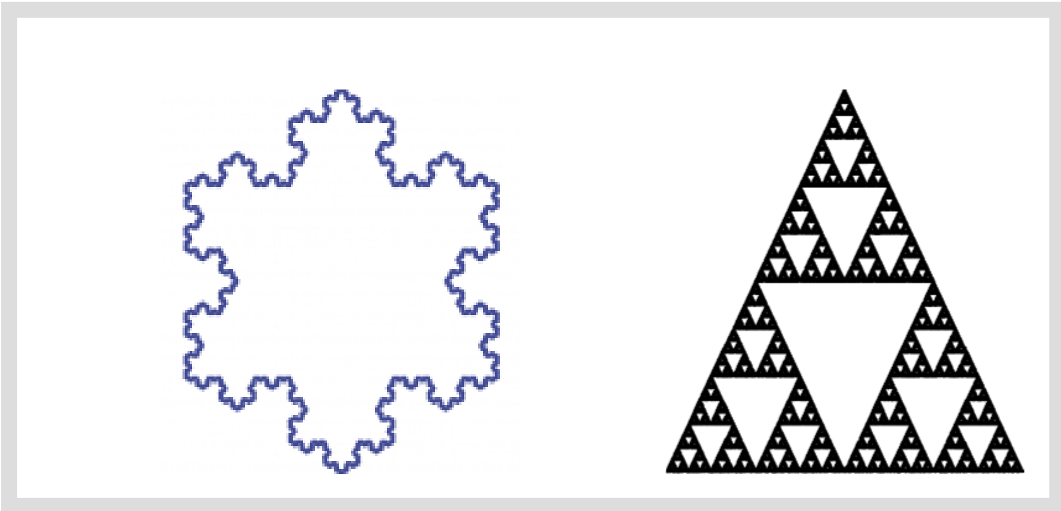
الأبـــعـــــــاد

بقلم : كرستيان روسو Christiane Rousseau
ترجمة: أسماء لكحل



الشكل 1

كيف نقيس أبعاد شكل هندسي؟ لوصف المجموعات الجزئية للمستوي، نـستعمل عــادة كلمات كمحيط، طول، مساحة، قطر،إلخ. ولكنها غير كافية عندما نريد وصــف الكُــسوريّات fractals. الأشكال الكُسوريّة هي أشكال هندسية معقدة للغاية ويجب علينا إيجاد وسيلة حساب للتعبير عن هذا التعقيد. ولذلك جاء الرياضياتيون بمفهوم البعد. البعد يسمح لنا بقيــاس مــدى تعقيد الكُسوريّ، هذا المفهوم للبعد هو تعميم وتحديد لمفهومنا الحدسي للبعد عندما نتكلم عن البعد 1 ، 2 ، 3. سنتحدث عن العديد من الوسائل لوصف أشكال كُـسوريّة وهــذا بدراســة المثالين: بساط سيربينسكي[1] Sierpinski ونُدْفَة فان كوخ[2] Von Koch (أنظر الشكل أعلاه).

1. ما هي مساحة بساط سيربينسكي؟

لنجرب في البداية كيفية إنشاء بساط سيربينسكي (أنظر الشكل 2): هو نتيجة لخطوات تكرارية. نأخذ مثلثا ونقسمه إلى 4 مثلثات بوصل أنصاف الأضــلاع، ثــم نحـذف المثلــث المركزي فيبقى لدينا ثلاثة مثلثات، نكرّر في كل منها العملية ونحذف المثلث المركزي، وهكذا دواليك.

---

[1] (1882- 1969) رياضي بولندي.
[2] (1870- 1924) رياضي سويدي.

(أ) المثلث الأول (ب) التكرار الأول (ج) التكرار الثاني

الشكل 2: الخطوات التكرارية لإنشاء بساط سيربينسكي

لدينا الآن كل المعطيات لحساب مساحة بساط سيربينسكي. لنفرض أن مساحة المثلث الرئيسي هي A (أنظر الشكل 2أ).

- في التكرار الأول، نحذف ربع المساحة A ويبقى لدينا $A_1 = \frac{3A}{4}$.
- في التكرار الثاني، نحذف ربع مساحة المثلثات الثلاثة المتبقية، أي ربع A_1. المساحة المحصل عليها هي إذن:

$$A_2 = \frac{3}{4}A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A.$$

- في التكرار الثالث، نحذف ربع مساحة المثلثات التسعة المتبقية، أي ربع A_2 . المساحة المحصل عليها هي إذن:

$$A_3 = \frac{3}{4}A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A.$$

- ...
- في التكرار n نحذف ربع مساحة المثلثات المتبقية البالغ عددها 3^{n-1}، أي ربع A_{n-1}. المساحة المحصل عليها هي إذن:

$$A_n = \frac{3}{4}A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n A.$$

- ...

بما أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

نستنتج أن مساحة بساط سيربينسكي تساوي الصفر!

2. ما هو طول نُدْفَة فان كوخ؟

نتحصل على نُدْفَة فان كوخ أيضا عن طريق التكرار. في كل خطوة من التكرار، نعوض قطعة مستقيمة بمجموعة من 4 قطع مستقيمة، طول كل منها ثلث طول القطعة المستقيمة التي تسبقها (أنظر الشكل 3). إذا كان محيط المثلث الأصلي في الشكل 3(أ) يساوي L فإن نجمة الشكل 3(ب) لها محيط $\frac{4}{3}L$، ومجسم الشكل 3(ج) له محيط $\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$. وهكذا دوليك. وبعبارة أخرى، في كل مرحلة، يكون المحيط مضروبا في $\frac{4}{3}$. بما أن الإنشاء يشمل عددا لا متناهيا من المراحل. فإن محيط النُدْفَة لا نهائي!

(أ) المثلث الأول   (ب) التكرار الأول   (ج) التكرار الثاني

الشكل 3: الخطوات التكرارية لإنشاء نُدْفَة فان كوخ

3. البعد الكُسوريّ

بساط سيربينسكي كائن معقد جدا. ورغم، ذلك مساحته منعدمة. ومن ثمّ فهي تزودنا بالقليل من المعلومات عن هذا الكائن. لما كانت نُدْفَة فان كوخ ذات طول غير منته فهذا يخبرنا بأنه كائن معقد دون إعطائنا معلومات دقيقة. لكي نستطيع توفير معلومات أكثر عن الكُسوريّات قام الرياضياتيين بإدخال مفهوم البعد.

كيف يعرف الرياضياتي البعد؟

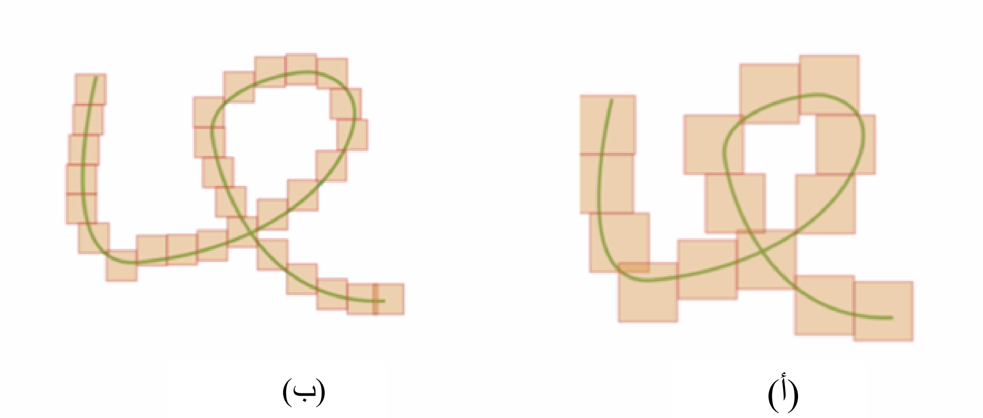
لنبدأ بفكرتنا الحدسية عن البعد. حدسيا، المنحنيات لها بعد 1، السطوح لها بعد 2 ، الحجوم لها بعد 3. إذن يتوجب علينا إعطاء تعريف رياضياتي يعطي 1 للمنحنيات و 2

للسطوح و3 للأحجام. نكتفي بالتركيز على البعدين 1 و2. سنغطي شكلا هندسيا لمستوي بمربعات صغيرة. (إذا أردنا تعريف البعد 3، فإننا نستعمل مكعبات صغيرة، غير أنه يمكننا أيضا استعمال مكعبات صغيرة للمنحنيات والسطوح بدون تغيير البعد**!**)

حالة منحنى. (أنظر الشكل 4)

نغطي الكائن بمربعات معينة أضلاعها تساوي قيمة معينة.

- إذا اعتبرنا أضلاع المربعات بأطوال تساوي نصف تلك، فنحن نحتاج نحو ضعف عدد المربعات لتغطية الشكل تقريبا.
- إذا اعتبرنا أضلاع المربعات بأطوال تساوي ثلث القيمة الأولى، فنحن نحتاج نحو ثلاثة أضعاف عدد المربعات لتغطية الشكل تقريبا.
- ...
- إذا اعتبرنا أضلاع المربعات بأطوال أصغر n مرة من القيمة الأولى، فنحن نحتاج نحو n ضعفًا من عدد المربعات لتغطية الكائن تقريبا.
-

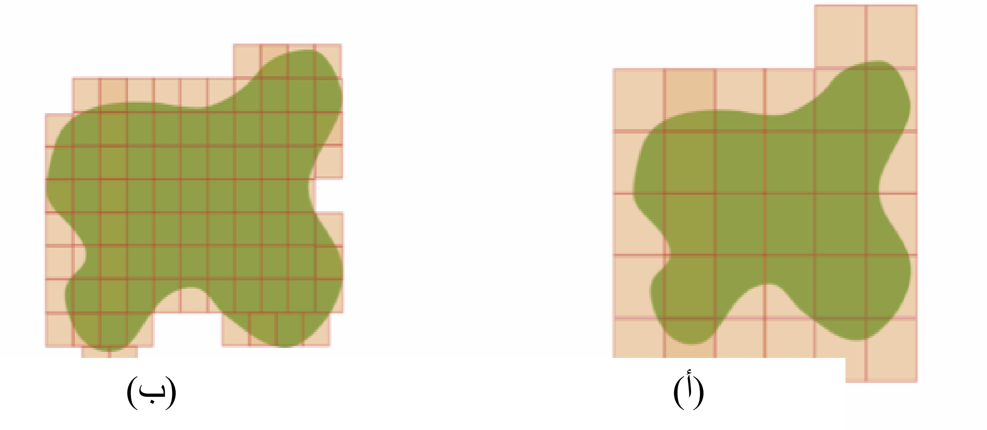


الشكل 4 : حساب البعد لمنحنى باستعمال مربعات ذات قياسات مختلفة

حالة سطح. (أنظر الشكل 5)

- إذا اعتبرنا أضلاع المربعات بأطوال تساوي نصف القيمة المعينة، فنحن نحتاج نحو 4 أضعاف عدد المربعات لتغطية الشكل تقريبا.
- إذا اعتبرنا أضلاع المربعات بأطوال تساوي ثلث القيمة الأولى، فنحن نحتاج نحو 9 أضعاف عدد المربعات لتغطية الشكل تقريبا.
- ...

- إذا اعتبرنا أضلاع المربعات بأطوال أصغر n مرة من القيمة الأولى ، فنحن نحتاج نحو n^2 ضعفاً من عدد المربعات لتغطية الكائن تقريبا.



الشكل 5 : حساب بعد السطوح باستعمال مربعات ذات قياسات مختلفة

نستطيع الآن إعطاء تعريف (بديهي) للبعد :

تعريف1: يكون لشكل من المستوي البعد d إذا وفقط إذا كان، عندما نأخذ مربعات ذات أضلاع أصغر n مرة، نحتاج حوالي n^d مرة أكثر من المربعات للقيام بذلك.

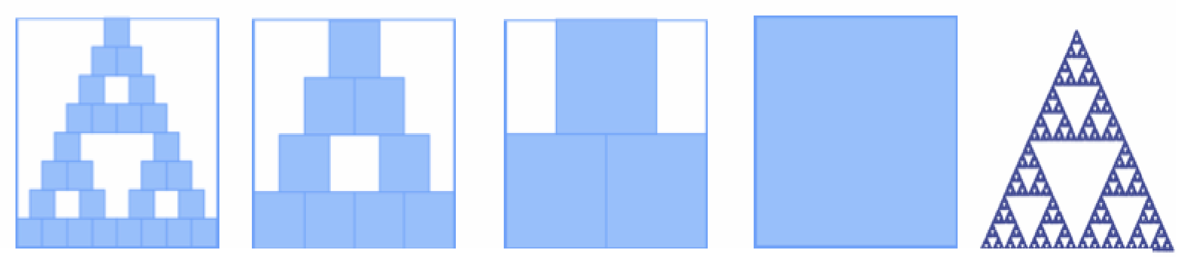
بعض الملاحظات حول تعريفنا

1. بطبيعة الحال، فالمربعات المستعملة لتغطية الشكل يمكنها أن تكون مائلة وأيضا متلاحقة.
2. بدلا من المربعات يمكننا استعمال مستطيلات لها نفس الأبعاد بنسبة الطول على العرض تساوي $1 \leq r$. نتحصل على نفس النتائج بالنسبة للأبعاد 1 و 2، وهذا صحيح في الحالة العامة الثنائية الأبعاد (المستوي). لحساب بعد نُدْفَة فان كوخ، من الأفضل استعمال المستطيلات عوض المربعات.
3. يسمى مفهوم البعد المعطى أعلاه في مؤلفات الرياضيات "بعد علبة"، وأيضا "بعد التعداد". وهذا لا يمثل في الواقع سوى أحد التعاريف الممكنة للبعد من بين تعاريف عديدة، غير أن جميعها يعطي 1 للمنحنيات الملساء، و 2 للسطوح الملساء، و 3 للحجوم. وهي تعطي نفس النتائج بالنسبة للكُسوريّات الذاتية التشابه، بينما يمكنها إعطاء نتائج مختلفة للمجموعات المعقدة التي لا تتمتع بخاصية التشابه الذاتي.

4. هناك أشكال هندسية ليس لها بالضرورة بعد العلبة. لكن معظم الأشكال الذاتية التشابه لها بعد لا يساوي عددا صحيحا.

يمكن تعميم هذا التعريف إلى الأشكال الهندسية التي تمثل مجموعات جزئيـــة مـــن $\mathbb{R}^m$ والنتيجة ستكون مستقلة عن العدد m المعطى.

تعريف 2: نعتبر مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^m$. نقول إنها ذات البعد d، إذا كان، كلما أخذنا فـــوق مكعبات ذات البعد m وبأضلاع أصغر n مرة (من القيمة الابتدائية) فإننا نحتاج تقريبـــا إلـــى فوق مكعبات عددها n^d للقيام بالتغطية.



(أ)   1 (ب)   3 (ج)   9 (د)   27 (هـ)

الشكل 6: عدد المربعات المُغَطِية لبساط سيربينسكي المرسوم في (أ)

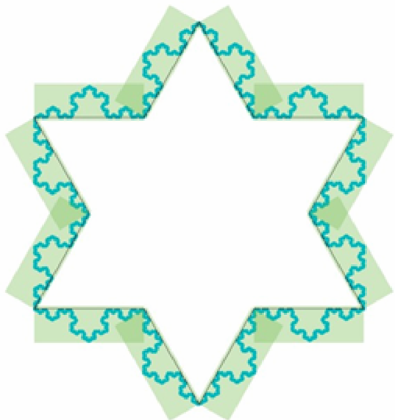
لنحسب الآن بعدَ بساط سيربينسكي (أنظر الشكل 6)

- نعتبر مربعا ضلعه يساوي قاعدة المثلث. إنه يغطي بساط سيربينسكي (أنظـــر الـــشكل 6 (ب)).
- إذا قسمنا ضلع المربعات على 2، نحتاج إلى 3 مربعات لتغطيـــة البـــساط. نلاحـــظ أن $3 = 2^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (أنظر الشكل 6 (ج)).
- إذا قسمنا ضلع المربعات على 4، نحتاج إلى 9 مربعات لتغطيـــة البـــساط. نلاحـــظ أن $9 = 4^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (أنظر الشكل 6 (د)).
- إذا قسمنا ضلع المربعات على 8، نحتاج إلى 27 مربـــع لتغطيـــة البـــساط. نلاحـــظ أن $27 = 8^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (أنظر الشكل 6 (هــ)).

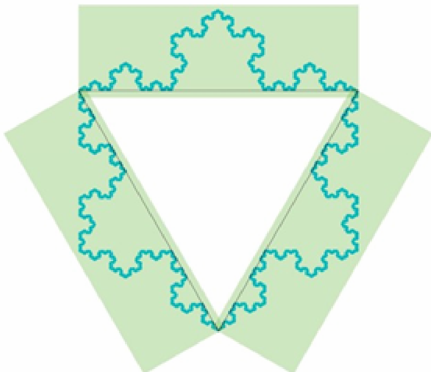
إذن من السهل إستخلاص أن بعد بساط سيربينسكي للشكل 6 (أ) هو $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim 1.585$.

نتأكد الآن من أن بعد نُدْفَة فان كوخ للشكل 1(ب) هو $\frac{\ln 4}{\ln 3} \sim 1.26$. لماذا؟

إذا حاولنا أن نغطي النُدْفَة بمربعات ذات أطوال متساوية لمقاطع الأشكال المتلاحقة (أنظر الشكل 3) نجد أنفسنا أمام مشكل لأن بعض المربعات تغطي ضلعا واحدا، بينما تغطي مربعات أخرى ضلعين عندما يشكل الضلعان رأسًا. نستعمل عندئذ نفس الحيلة الواردة في الملاحظة 2 أعلاه، ونستخدم مستطيلات طولها يساوي ثلاثة أضعاف عرضها.



(ب) بـ 12 مستطيلاً



(أ) بـ 3 مستطيلات

الشكل 7: حساب بعد نُدْفَة فان كوخ باستعمال المستطيلات

نقدم هنا الخطوات الأساسية للبرهان ونترك للقارئ إتمام التفاصيل. عند كل تكرار نحتاج إلى عدد من المستطيلات يعادل عدد أضلاع النُدْفَة، باختيار مستطيلات لها نفس طول أضلاع النُدْفَة. إذا وضعنا هذه المستطيلات نحو الخارج في النُدْفَة (كما في الشكل 7)، فسوف تغطي القطع المستقيمة الناتجة عن التكرارات الموالية كما هو موضح في الشكل 7. من السهل التأكد من أنه من الضروري أن يتساوى عدد المستطيلات مع عدد أضلاع النُدْفَة. مثلث الإنطلاق له 3 أضلاع. عند كل تكرار نضرب عدد الأضلاع في 4. إذن نضرب عدد المستطيلات في 4. في نفس الوقت نستعمل في كل مرة مستطيلات ذات أضلاع أصغر بثلاث مرات. لما كان $4 = 3^{\frac{\ln 4}{\ln 3}}$، نستخلص أن بعد نُدْفَة فان كوخ تساوي $\frac{\ln 4}{\ln 3}$.

يعطي البعد "قياسا" لمدى تعقيد أو كثافة الشكل الكُسوريّ. نرى بالفعل أن كثافة بساط سيربينسكي أكبر من كثافة نُدْفَة فان كوخ الذي يشبه منحنى "سميك". وهذا ما يؤكده كوْن $\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

تطبيقات

شبكة من الشعيرات الدموية في جوار ورم. ليست مماثلة للموجودة بجوار باقي الأعضاء. هناك بحوث جارية في هذا الموضوع وخصوصا حول البعد الكُسوريّ لهذه الشبكة وذلك بهدف تحسين التشخيصات انطلاقا من التصوير الطبي.

رسم شجرة الشعيبات الهوائية. الرياضيون البدنيون المحترفون هم الأكثر عرضة للربو مقارنة بغيرهم من الناس. لماذا؟ المقال الوارد في المرجع يدرس الرئة الأمثل. فهناك 17 مستوى للأنابيب الشُعيبية قبل الوصول إلى القُصيبات النهائية، المتبوعة بعنقودات رئوية والتي لها دور في تبادل الغازات. إذا كانت الأنابيب الشُعيبية رقيقة جدا فإن الضغط عليها يزداد عندما ينتقل الهواء إلى المستوى التالي للقُصيبات. ولكن إذا كانت بالغة الاتساع بحيث يظل الحجم بدون تغيير عند كل مستوى، فالحجم يصبح كبيرا جدا (سيصبح غير منتهٍ لو كان هناك عدد المستويات لامنتهٍ). وهكذا يجب أن يكون للرئة "الأمثل" أدنى حجم يُمكنها من عدم زيادة الضغط. لكننا حين نقترب من الرئة الأمثل فإن انخفاضا صغيرا لقطر القُصيبات يحدث زيادة للضغط تفوق الزيادة التي يُحدثه نفس الإنخفاض في قُصيبات هوائية أوسع. (هذا يأتي من خصوصيات الدالة غير الخطية التي تحدث الضغط.) إن للرئة البشرية فروعا أوسع وحجما أكبر من الرئة الأمثل نظريًا. هذا الهامش من الأمان يعطينا حماية في حالة ضيق التنفس، حالة مرَضِيَّة تنتج من تقلص قطر القُصيبات والتي يمكن أن يسببها الربو.

يمتلك الرياضيون البدنيون عموما رئة أقرب إلى الرئة الأمثل نظريا، وهم بالتالي الأكثر عرضة للمرض.

الأمعاء الدقيقة. السطح الخارجي للمعي الدقيق هو حوالي 0.5 م^2 بينما يقدّر السطح الداخلي بحوالي 300 م^2. لقد رأينا سابقا، مع نُدْفَة فان كوخ، أن المنحنى الكُسوريّ يمكن أن يكون ذا طول غير منته وأن يشغل سطحا منتهيا. نستطيع أن نتصور بسهولة أن السطح الكُسوريّ الذي يشغل حجما محددا يمكن أن تكون له مساحة غير منتهية. نجد هذه الفكرة في الطبيعة: مساحة السطح الداخلي للمعي الدقيق ينبغي أن تكون كبيرة جدا بهدف بلوغ أقصى حد من الإمتصاص المعوي. تحقق الطبيعة الكُسورية لهذا السطح الهدف المنشود. وهذا صحيح أيضا بالنسبة لسطح الحجيرات التي تنتهي بها القُصيبات الهوائية في الرئة: بما أن الشجرة الشُعيبية ذات طبيعة كُسوريّة فإن سطح الحجيرات سيكون كبيرا جدا، وهو ما يجعل التبادلات الغازية تبلغ حدها الأقصى.

المراجع

[Ma] B. Mauroy, M. Filoche, E.R. Weibel, B. ~Sapoval, An optimal bronchial tree may be dangerous, Nature, 427 (2004), 633–636.

تقاسم هذا على:

- Email
- طباعة
- Facebook
- Twitter

هذا المقال متوفر أيضا بـــ: الانجليزية، ألمانية، الإسبانية.

أرسل الموضوع على شكل PDF

أدخل عنوان البريد الإلكتروني

ابعث

اترك تعقيبًا

بريدك الإلكتروني لن ينشر . الحقول المطلوبة مسجلة *

الاسم *

البريد الالكتروني *

الموقع الإلكتروني

التعقيب

You may use these HTML tags and attributes: <a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>

أرسل التعقيب

أشعروني بجديد التعقيبات على البريد الإلكتروني.

أشعروني بالمقالات الجديدة عبر البريد الإلكتروني.