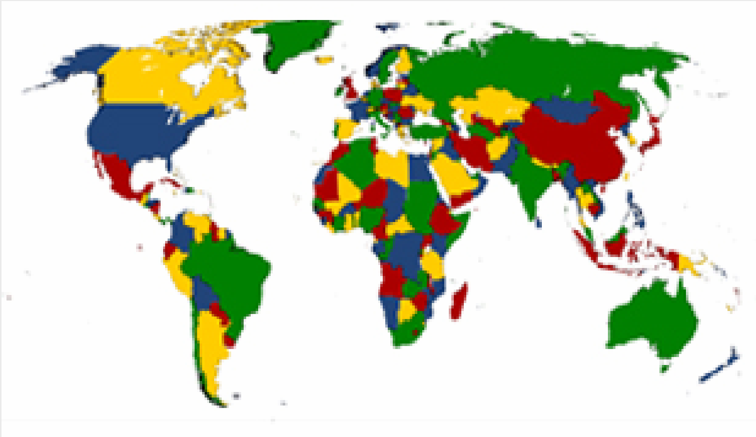
تلوين الخرائط وأساسات غروبنر Gröbner

الكاتب الأصلي: أسكوديرو هيرنانديس Escudeiro Hernandes

ترجمة: إيمان لكميتي



هذه الصورة ملك لموقع mathscareers.org.uk
الذي وافق مشكورا على إدراجها في هذه المقالة

إستنادا إلى" نظرية الألوان الأربعة" فإن أربعة ألوان فقط كافية لتلوين خريطة دون أن يكون لمنطقتين متجاورتين نفس اللون. باستعمال كثيرات الحدود وأساسات غروبنر Gröbner نستطيع أن نبيّن فيما إذا كانت 3 ألوان كافية لتلوين خريطة مشابهة أو لا.

1. تلوين الخرائط

نظرية الألوان الأربعة[1] تنص على أن أية خريطة، سواء كانت مستوية أو كروية، يمكن أن تلون بأربعة ألوان دون أن يكون لمنطقتين متجاورتين نفس اللون. من السهل إيجاد أمثلة لخرائط لا يمكن أن تلوّن بثلاثة ألوان فقط، وأخرى نستطيع تلوينها بثلاثة ألوان. تقوم طريقة تحديد ما إذا كانت ثلاثة ألوان كافية لتلوين خريطة على تحليل جملة معادلات كثيرات حدود مرتبطة بالخريطة. كل لون مرتبط بالجذر التكعيبي (العقدي) للوحدة، وكل منطقة يرمز إليها بالمتغير x_i بحيث لا يمكنها إلا أن تأخذ واحدة من ثلاث قيم، أي واحدًا من الألوان. عندئذ يكون لدينا $x_i^3 - 1 = 0$ لكل منطقة.

من أجل المنطقتين x_j و x_k، لدينا:

$$0 = x_j^3 - x_k^3 = (x_j - x_k)(x_j^2 + x_j x_k + x_k^2) .$$

---

[1] انظر مثلا
http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D8%A7%D9%84%D8%A3%D9%84%D9%88%D8%A7%D9%86_%D8%A7%D9%84%D8%A3%D8%B1%D8%A8%D8%B9%D8%A9

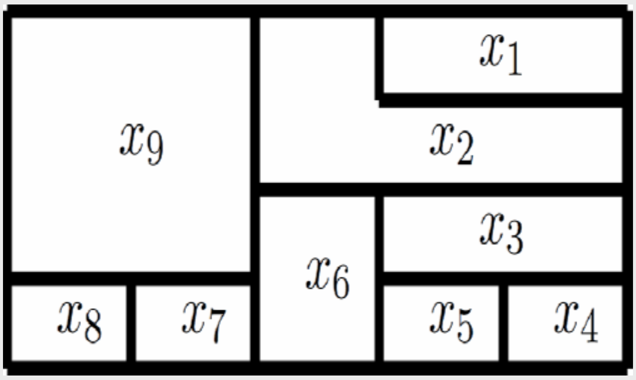
إذا كانت x_j و x_k منطقتين متجاورتين فلا يمكن لهما أن تكونا من نفس اللون، ومن ثمّ $x_j \neq x_k$. وهذا معناه $x_j^2 + x_j x_k + x_k^2 = 0$. بهذه الطريقة، يمكن لخريطة من n منطقة أن تُلون بثلاثة ألوان إذا وفقط إذا كانت جملة معادلات كثيرات الحدود أدناه تقبل على الأقل حلا :

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i^3 - 1 = 0, \\ x_j^2 + x_j x_k + x_k^2 = 0 \end{cases}$$

حيث $i = 1,\ldots,n$ و x_j و x_k تمثل المناطق المتجاورة.

مثال1

نعتبر الخريطة :



الشكل 1

هل يمكن أن تلون بثلاثة ألوان؟

للإجابة على هذا السؤال يجب التحقق من أنه يمكن حل جملة المعادلات (1) مع $i = 1 \ldots 9$ و

$$(j,k) \in \{(1,2);(2,3);(2,6);(2,9);(3,4);(3,5);(3,6);(4,5);(5,6);(6,7);(6,9);(7,8);(7,9);(8,9)\}.$$

2. جمل المعادلات المؤلفة من كثيرات الحدود

الجواب على الكثير من المسائل الرياضية يكمن في دراسة معادلات تتألف من كثيرات الحدود، وهو أمر ليس دائما سهلا. فإذا كانت الجملة عبارة عن معادلات خطية، يمكننا باستعمال طريقة حذف غوص مثلا، استبدال الجملة بجملة أخرى مكافئة تسهل إيجاد الحل. في حالة جمل كثيرات الحدود، هناك طريقة مشابهة نقدمها أدناه.

نرمز بـــ $P(n)$ لمجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات العقدية (المركبة) والمتغيرات $x_1,\ldots,x_n$.

عندما تكون مجموعة كثيرات الحدود $f_1,\ldots,f_r$ معطاة في $P(n)$، نعرف المثالي الذي تولّده بـــــ :

$$I = \langle f_1,\ldots,f_r \rangle = \{ h_1 f_1 + \ldots + h_r f_r : h_1,\ldots,h_r \in P(n) \}.$$

نظرية للرياضي دافيد هيلبرت David Hilbert: تنص العلاقة (2) المسماة نظرية أصفار هيلبرت على أن الجملة $f_1 = \ldots = f_r = 0$ تقبل حلا عُقديا إذا وفقط إذا كان $1 \notin \langle f_1,\ldots f_r \rangle$. فكيف لنا التحقق من الشرط الأخير؟

من السهل التحقق من أن لجملتيْ المعادلات $f_1 = ... = f_r = 0$ و $g_1 = ... = g_s = 0$، بحيث $f_i, g_i \in P(n)$ وتحققان الشرط

$$(2) \quad \langle f_1,...,f_r \rangle = \langle g_1,...,g_r \rangle$$

نفس الحل.

ولذلك، فإن إستراتيجية حل الجملة $f_1 = ... = f_r = 0$ تتوقف على إيجاد كثيرات حدود $g_1,...,g_s$ تحقق الشرط (2)، وبواسطتها يمكن التحقق مما إذا كان عنصر $f \in P(n)$ ينتمي أو لا إلى المثالي $\langle f_1,...,f_r \rangle$ والذي يكون فيه حساب الحل المشترك أسهل من حسابه في الجملة الأصلية.

لقد تم إثبات الوجود النظري للمجموعة $G = \{g_1,...,g_s\}$ خلال النصف الأول من القرن العشرين من طرف الرياضي ولفغانغ غروبنر Wolfgang Gröbner. وبعد سنوات، أنشأ تلميذه برونو بشبرغر Bruno Buchberger خوارزمية تسمح بتحديد هذه المجموعة. تسمى هذه المجموعات أساسات غروبنر، وتعتبر خوارزمية بشبرغر الحسابية من أهم أدوات الحساب الجبري.

إذا كان المثالي من الشكل $I = \langle f_1 \rangle$ فإن $f \in I$ إذا وفقط إذا كان $f = h_1 f_1$. هذا يعني أن f قابل للقسمة على f_1. كما أن $f \in \langle f_1,...f_r \rangle$ إذا وفقط إذا كان، مما يوحي بشيئ مشابه بخصوص قسمة f على $f_1,...,f_r$. في الواقع، يمكننا قسمة كثير حدود ذي عدة متغيرات على مجموعة منتهية من كثيرات الحدود، شرط أن تكون الحدود مرتبة بطريقة معينة.

3. أساسات غروبنر Gröbner

وحيد حد m من $P(n)$ هو عنصر من الشكل $x_1^{a_1},...,x_n^{a_n}$، حيث $a_1,...,a_n$ أعداد صحيحة موجبة أو معدومة. نرمز بـــ 1 لوحيد الحد $x_1^0...x_n^0$. من بين الترتيبات $\leq$ المدرجة على أحاديات الحد لـــ $P(n)$ التي تجعل تطبيق خوارزمية القسمة أمرًا ممكنا هي تلك التي تحقق العلاقتين $1 \leq m$ و $m_1.m \leq m_2.m$ عندما $m_1 \leq m_2$.

كمثال على ذلك هناك الترتيب المعجمي $\leq_{lex}$ حيث $x_1^{a_1}..x_n^{a_n} \leq_{lex} x_1^{b_1}..x_n^{b_n}$ إذا وجد $1 \leq i \leq n$ بحيث $a_i < b_i$ و $a_j = b_j$ من أجل كل $j < i$.

لنعتبر ترتيبا ما على وحيدات الحد. يسمى أكبر وحيد حد في كثير الحدود f الحد المهيمن لـــــ f، ويرمز له بـــــ $\mathrm{lt}(f)$ (leading term).

أساس غروبنر لمثالي $I = \langle f_1,...,f_r \rangle$ بالنسبة لترتيب معين لوحيدات الحد، هو تعريفا، مجموعة $G = \{g_1,...,g_s\}$ من عناصر I حيث كل حد مهيمن من كل عنصر من I يقبل القسمة على الحد المهيمن من عنصر من G. يمكننا إثبات أن كل أساس لغروبنر G من I مجموعة تحقق الشرط 2.

ونتيجة لذلك فإن $1 \in I$ إذا وفقط إذا وجد أساس لغروبنر في I يحتوي ثابتا غير معدوم، لأن $1 \leq m$ من أجل كل حد m من $P(n)$.

على سبيل المثال، $G=\{f_1\}$ هو أساس غروبنر لـــ $\langle f_1\rangle$، من أجل كل ترتيب على وحيدات الحـــد. فـــي حين أن $G=\{x+y+z-6, x-y+1, x+y-z\}$ ليست أساس غروبنر لـــ

$$I=\langle x+y+z-6, x-y+1, x+y-z\rangle$$

بالنسبة للترتيب المعجمي لأن

$$\mathrm{lt}(x+y+z-6-(x-y+1))=\mathrm{lt}(2y+z-7)=2y$$

لا يقبل القسمة على

$$x=\mathrm{lt}(x+y+z-6)=\mathrm{lt}(x-y+1)=\mathrm{lt}(x+y-z).$$

لكي نتحصل على أساس غروبنر لمثالي، من أجل ترتيب معين على وحيدات الحدود، يمكننا استعمال خوارزمية بشبرغر [2]. نجد خوارزميات تسمح بحساب أساسات غروبنر في أغلبية برامج الحساب الجبري.

نلاحظ في المثال السابق أن أساس غروبنر للمثالي $I=\langle x+y+z-6, x-y+1, x+y-z\rangle$، بالنسبة للترتيب المعجمي هو $G=\{x+y+z-6, 2y+z-7, 2z-6\}$.

4. حل المسألة وبعض التطبيقات

إن جملة المعادلات في المثال 1 لها على الأكثر عدد منته من الحلول (تسعة متغيرات، كل واحـــد منهـــا يمكنه أخذ واحدة من بين ثلاث قيم). تكمن المسألة في معرفة ما إذا كان للجملة حل، وفي هـــذه الحالـــة ينبغـــي تعيينه.

بتطبيق خوارزمية بشبرغر على جملة المثال 1، نتحصل، من أجل الترتيـــب المعجمـــي، علـــى أســـاس غروبنر G التالي

$$G=\begin{cases} x_1^3-1;\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2;\ x_3^2+x_3x_2-x_2x_1-x_1^2; \\ x_4+x_3+x_2;\ x_5-x_2;\ x_6+x_3+x_2;\ x_7-x_2;\ x_8+x_3+x_2;\ x_9-x_3\}. \end{cases}$$

ومن ثمّ فإن $1\notin I$. وعندئذ نلاحظ أن الجملة تقبل حلولا. تعبّر المعادلات التالية

$$\begin{cases} x_1^3-1=0, \\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2=0, \\ x_5-x_2=0, \\ x_7-x_2=0, \\ x_9-x_3=0 \end{cases}$$

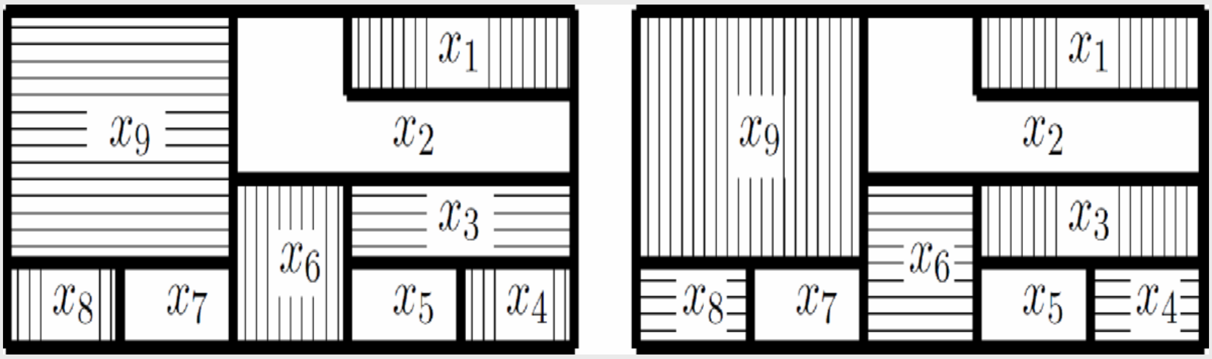
عما يلي: يمكننا استعمال أي لون لـــ x_1، مع $x_2\neq x_1$ و $x_2=x_5=x_7$ و $x_3=x_9$.

بما أن الألوان تُمثل بواسطة جذور تكعيبية عقدية للوحدة فإن الحل الوحيد من أجل $x_4+x_3+x_2=0$ و $x_6+x_3+x_2=0$ و $x_8+x_3+x_2=0$ يكون بإعطاء قيم (ألوان) مختلفة لـــ x_2 و x_3 و x_4. ومنه $x_4=x_6=x_8$.

أخيرا، نجد العلاقة $0=x_3^2+x_3x_2-x_2x_1-x_1^2=(x_3+x_2+x_1)(x_3-x_1)$ التي تؤدي إلى إمكانيتين: $x_3+x_2+x_1=0$

[2] انظر
https://www.risc.jku.at/people/buchberg/papers/1970-00-00-A.english.pdf

أو $x_3 - x_1 = 0$. وهذا معناه أن لـــ x_1 و x_2 و x_3 ألوانا مختلفة أو $x_1 = x_3$. وهكذا، نجد بمبادلة الألوان كل الحلول الممكنة:



الشكل 2

يمكن استخدام أساسات غروبنر أيضا لتعيين مثاليات، وذلك عن طريق تحويل المعادلات الوسيطية إلى معادلات ديكارتية (من أجل السطوح والمنحنيات مثلا). كما نستطيع استعمالها لحساب كثير الحدود الأصغري ذي الأرقام الجبرية، وكذا للتأكد من نظريات الهندسة الإقليدية، ومن صحة الإنشاءات الأوريغامية Origami. وتستخدم كذلك في حل شبكات السودوكو Sudoku (انظر المراجع (4) و(5) و (6)).

المراجع

(1) http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf

(2) http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/dispense/nullstellen.pdf

(3) https://www.risc.jku.at/people/buchberg/papers/1970-00-00-A.english.pdf

(4) Adams, W. and Loustaunau, P., *An Introduction to Gröbner Basis*, AMS, Providence RI (1994).

(5) Cox, D; Little, J. and O'Shea, D., *Ideals, Varieties and Algorithms*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, (1996).

(6) Hernandes, M. E., *Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner*, 28°. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (2011).

تقاسم هذاعلى:

- البريد الإلكتروني.
- طباعة
- Facebook
- Twitter

هذا البريد متوفر أيضا بـــ : الانجليزية، الألمانية.

أرسل الموضوع على شكل PDF

ابعث

بريدك الإلكتروني لن ينشر. الحقول المطلوبة مسجلة *

الاسم *

البريد الالكتروني *

الموقع الإلكتروني

التعقيب

You may use these HTML tags and attributes: <a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>

أرسل التعقيب

أشعروني بجديد التعقيبات على البريد الإلكتروني.

أشعروني بالمقالات الجديدة عبر البريد الإلكتروني.