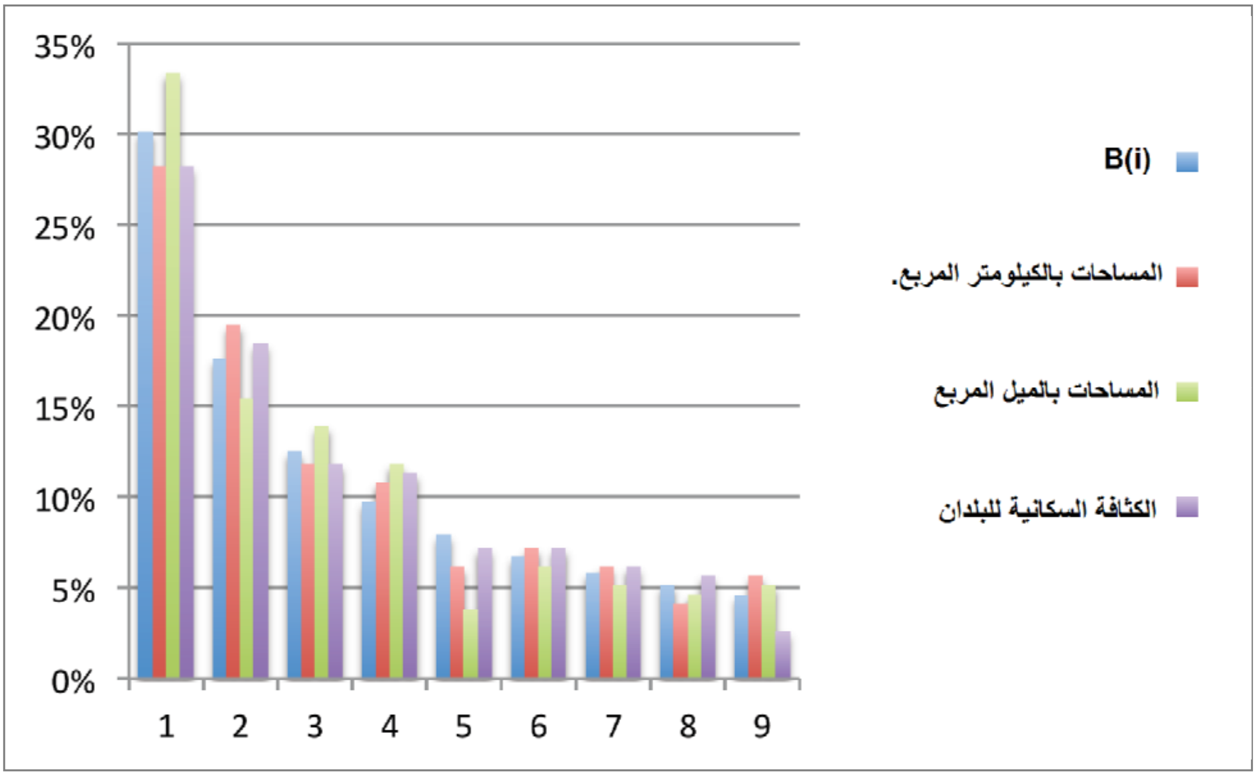
قانون بنفورد Benford : تعلم التزوير أو اكتشاف التزوير؟

بقلم : **كريستيان روسو** Christiane Rousseau

ترجمة : **إيـــــمان لكمـــــيتي**



من المجازفة تغيير الكثير من الأرقام في الملفات المالية إذا كانت معرفتنا بالرياضيات متواضعة. ففي هذا النوع من المستندات، الأرقام تتبع قاعدة رياضية غريبة تدعى قانون بنفورد Benford، أو "قانون الرقم الأول" First-Digit Law غير العادية. إذا نسينا إتباع هذه القاعدة فإن الأعداد لن تتمكن من اجتياز بعض الاختبارات الإحصائية فتلفت الانتباه، مما يجعلها عرضة لدراسة معمقة أكثر من غيرها. يُؤكد هذا القانون أنه إذا جُمِّعت الأعداد عشوائيا وحُسبت ترددات أولى أرقامها غير المعدومة، فستكون 30% هي نسبة الأعداد التي يكون أول رقم غير معدوم فيها هو 1، في حين أن الأعداد التي تبدأ بالرقم 9 ستكون نسبة ظهورها 4.5% فقط. تمسّ هذه القاعدة مجموعات أخرى من الأعداد، مثل قوى الرقم 2 أو متتالية فبوناتشي Fibonacci .

لـــــمـــــــاذا؟

لدينا تفسيرات مقنعة، سوف نحيطكم بها.

يتعلق قانون بنفورد بتوزيع أول رقم غير منعدم (أو رقم دال) في الأعداد. أول رقم غير منعدم في عدد موجب هو أول رقم غير معدوم يقع في أقصى يسار الكتابة العشرية لهذا العدد. على سبيل

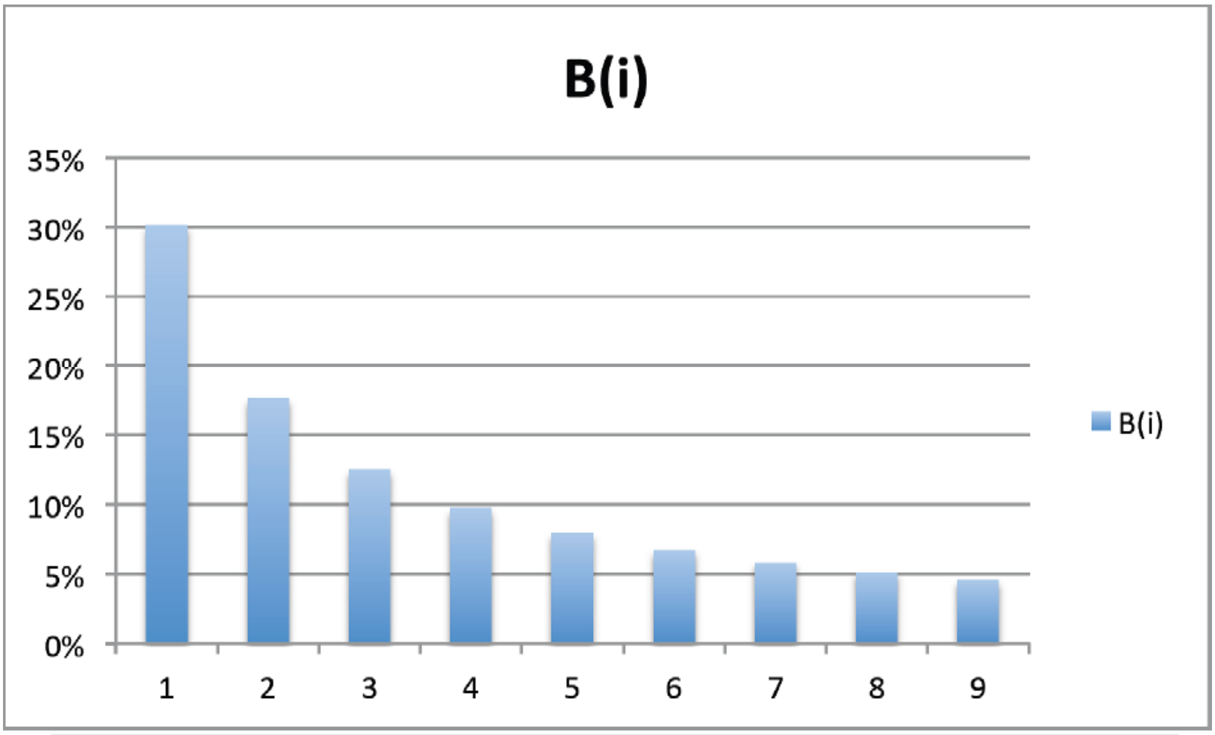
المثال، أول رقم دال للعدد π هو 3 ، وفي العدد 2371.5 هو 2. أما بالنسبة لــ 0.00563 فهو 5. هناك طريقة أخرى لتحديده، والتي ستكون مفيدة لمناقشتنا الرياضية، وهي كتابة كل عدد حقيقي موجب x على شكل رقم $m \in [1,9)$ مضروبا في قوة لــ 10 :

$$x = m10^n, n \in \mathbb{Z}.$$

إذن أول رقم دال غير معدوم لــ x هو الجزء الصحيح لــ m، الذي يرمز له بــ $\lfloor m \rfloor$. حيث يسمى m الجزء العشري لــ x. نفرض الآن النتيجة القائلة إنه إذا جمعنا الأعداد بشكل عشوائي وحسبنا التكرار $B(i)$ لأول رقم غير معدوم i، فإن $B(i)$ يساوي بالتقريب $\log_{10}(1+\frac{1}{i})$. مما يعطينا التكرارات التالية:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B(i)$	0.3010	0.1761	0.1249	0.0969	0.0792	0.0669	0.0580	0.0511	0.0458

الجدول 1: تكرارات قانون بنفورد

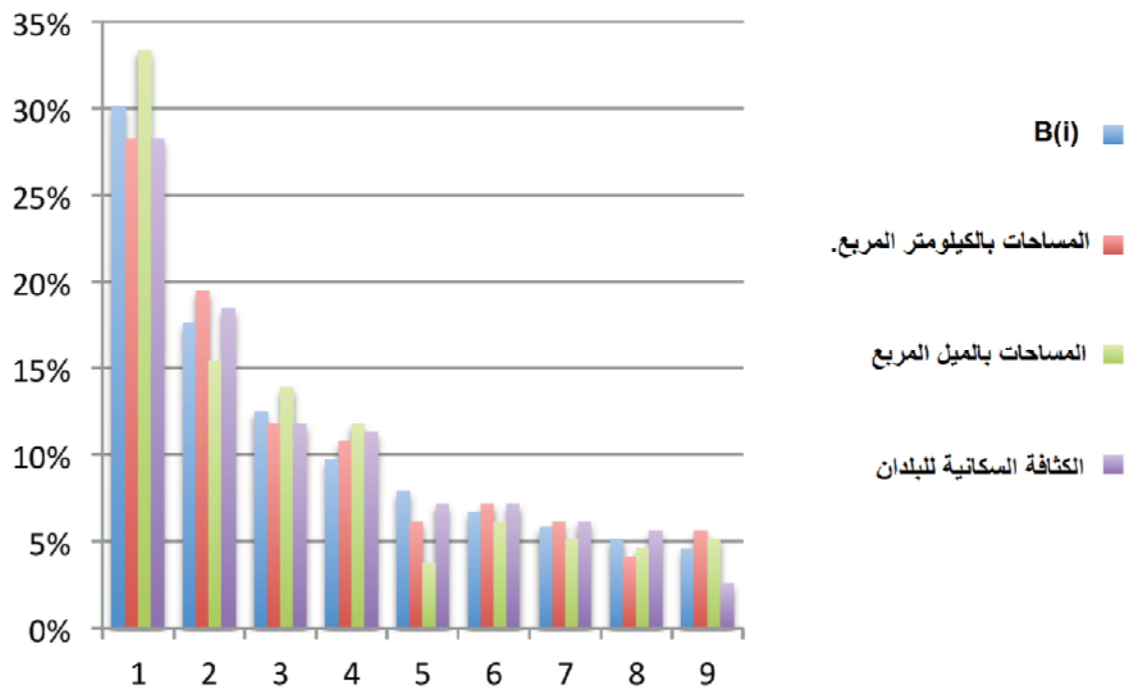


الشكل1: التكرارات B(i) لقانون بنفورد.

لنقدم الآن لمحة تاريخية موجزة : أُكتشفت الظاهرة لأول مرة من قِبل الفلكي سيمون نيوكومب Simon Newcombe (1835–1909) الذي لاحظ أن الصفحات الأولى للجداول اللوغاريتمية التي تحوي أرقاما دالة صغيرة ممتلئة أكثر من التي تليها. لكن ملاحظاته أُهْمِلت وأعاد اكتشافها بنفورد Frank Benford (1883–1948) حوالي سنة 1938. لقد قام بنفورد بجمع عشرات آلاف الأعداد

المختلفة المصادر التي تخضع لقانونه. والملاحظ أن قاعدة البيانات الحديثة لسيمون بلوف Simon Plouffe، والتي تحتوي 215 مليون من الثوابت الرياضية، تتبع أيضا هذا القانون.

هناك الكثير من مجموعات الأعداد غير العشوائية التي تخضع أيضا لقانون بنفورد. كما هو الحال بالنسبة للكثافة السكانية ومساحة البلدان، وأطوال الأنهار، إلى غير ذلك. ربما ستطلبون مني التوقف لأن الشكوك بدأت تراودكم... بأي وحدة كتبت هذه الأطوال والمساحات؟ هل وحدة الأطوال بالأميال أم بالكيلومترات؟ **ليس لهذا الأمر أية أهمية**... مادامت أطوال الأنهار بالكيلومترات تخضع لقانون بنفورد فإن أطوالها بالأميال تخضع إليه أيضا! فتغيير الوحدة ينجم عنه تغيير في السلم. سنرى أن قانون بنفورد لا يتأثر بتغيير السلم. وعلاوة على ذلك فإن قانون بنفورد هو قانون الاحتمالات الوحيد الذي يبقى ثابتا بتغير السلم.



الشكل 2: هذه بعض المعطيات التي تتبع بالتقريب قانون بنفورد:
مساحات البلدان بالكيلومتر المربع، وبالميل المربع، والكثافة السكانية للبلدان.

أخبرتكم في مقدمة المقالة أن أعداد متتالية فيبونتشي تتبع قانون بنفورد. غير أن قانون بنفورد يبدو إلى حد معين غير موضوعي، ذلك لتعلّقه بالأساس 10 الذي نكتب وفقه أعدادنا. في الأساس b، حيث $b \neq 10$، فالأرقام غير المعدومة هي عناصر المجموعة $\{1;...;b-1\}$، يخبرنا قانون بنفورد أنه في الأساس b يكون تكرار أول رقم دال i من الشكل $B_b(i) = \log_b(1+\frac{1}{i})$. وعليه فأعداد متتالية فيبونتشي تتبع قانون بنفورد في أي أساس b! قانون بنفورد **ثابت مهما تغيّر الأساس**. وهو قانون الاحتمال غير البديهي الوحيد الذي لا يتغيّر بتبديل الأساس.

حان الوقت الآن لتقديم التفسيرات، وهي تتطلب منكم تذكّر بعض دروس الاحتمـــالات. لكـــن ربما تفضلون اكتشافها بأنفسكم قبل قراءة البراهين الرياضية.

1. الثبات بتغير السلم

دعنا نجري تغييرا بسيطا في السلم يتمثل في ضرب جميع أرقام مجموعة من الأعداد في الرقم 2. إذا اعتبرنا أن أول رقم في هذه الأعداد هو 1، فستنتج مجموعة جديدة تبدأ أعدادها بأحد الـــرقمين التاليين 2 أو 3. من السهل التحقق من أن $B(1) = B(2) + B(3)$. بالفعل

$$
\begin{aligned}
B(2) + B(3) &= \log_{10}(1 + \tfrac{1}{2}) + \log_{10}(1 + \tfrac{1}{3}) \\
&= \log_{10}\frac{3}{2} + \log_{10}\frac{4}{3} = \log_{10}\frac{3}{2}\frac{4}{3} \\
&= \log_{10} 2 = B(1).
\end{aligned}
$$

بنفس الطريقة، يمكنكم التحقق من أن $B(2) = B(4) + B(5)$ ، إلخ. لكن ماذا نفعل إذا غيرنا الأميال إلى الكيلومترات. أي إذا ضربنا الأعداد في 1.6؟ كما ذكرنا آنفا فقانون بنفورد أعلاه مقَيِّد جدا ونحن بحاجة إلى تعميمه. ماذا يعني قولنا إن أول رقم دال غير معدوم هو i؟ معناه أن الجزء العشري m ينتمي إلى المجال $[i, i+1)$. إذن قانون بنفورد هو توزيع الاحتمال الجزئي للجزء العشري. قانون بنفورد المعمم (والذي سنسميه، تجاوزًا، قانون بنفورد) المطبق على الجزء العشري يعطى بتابع كثافة على المجال $[1,10)$. عندما نختار عددا بصفة كيفية، فإننا نستطيع حساب جزئه العشري. مما يعطينا متغيرا عشوائيا M قيمه من المجال $[1,10)$. نقول إنه يتبع قانون بنفورد إذا كان تابع كثافته من الشكل

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \log_{10}} & , x \in [1,10), \\ 0 & , x \notin [1,10). \end{cases}
$$

إذا كان $\mathrm{P}(a \le M < b)$ يمثل الاحتمال بحيث $a \le M < b$ ، فهذا يعني أنه لدينا

$$
\mathrm{P}(a \le M < b) = \int_a^b f(x)dx.
$$

وهو فعلا تعميم لقانون بنفورد لأن

$$
\begin{aligned}
B(i) = P(i \le M < i+1) &= \int_i^{i+1} \frac{1}{x \log 10} dx \\
&= \frac{1}{\log 10}(\log(i+1) - \log(i)) = \frac{1}{\log 10}(\log\frac{i+1}{i}) \\
&= \frac{\log(1+\frac{1}{i})}{\log 10} = \log_{10}(1+\frac{1}{i})
\end{aligned}
$$

ماذا نقصد بقولنا إن المتغير العشوائي X من المجال $[1,10)$ لا يتغير بتغيير السلم؟ نعني بذلك أنه إذا كان c عددا حقيقيا موجبا تماما وإذا اعتبرنا المتغير العشوائي $Y = cX$، فإن الجزء العشري M للمتغير العشوائي Y لديه نفس تابع كثافة X. ليس صعبا إثبات أن هذا ما يحدث لما X يتبع قانون بنفورد، لكننا سنميّز عدة حالات بحسب قيمة c التي سندرس إحداها ونترك لكم بقية الحالات. يمكننا كتابة $c = m10^r$، حيث $m \in [1,10)$ هو الجزء العشري لـ c. بما أن لـ cX و mX نفس الجزء العشري، فإنه يكفي اعتبار الحالة لما $c \in [1,10)$.

ما هي الأداة التي نستعملها لإثبات هذا؟ ربما تتذكرون من دروسكم في الاحتمالات أنه أحيانا يكون تابع التوزيع أكثر فائدة من تابع الكثافة لمتغير عشوائي مستمر. تابع التوزيع لمتغير عشوائي M يعرَّف بـــ

$$F(x) = P(M \le x).$$

إذا خضع X لقانون بنفورد فإن تابع توزيعه يعطى بـ

$$(1) \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1, \\ \log_{10} & , x \in [1,10), \\ 1 & , x \ge 10. \end{cases}$$

لذا وجب علينا إثبات أنه إذا كان X يتبع قانون بنفورد و M هو الجزء العشري لـ cX من أجل $c \in [1,10)$، فإن تابع توزيع M يعطى بالعلاقة (1).

لهذا الغرض، نحن بحاجة لحساب $\mathrm{P}(M \le z)$ حيث $z \in [1,10]$. M هو الجزء العشري لـ cX بقيم من المجال $[c,10c)$. إذن $M = cX$ لما $cX < 10$، ويساوي لـ $cX/10$ لما $cX \ge 10$. الحالة الأولى تتحقق عندما $z < c$. حتى ينتمي الجزء العشري لـ cX للمجال $[1,c)$ فإن الإمكانية الوحيدة هي $cX \in [10,10c)$. إذن الجزء العشري لـ cX يساوي $cX/10$.

ولذلك فإن

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M \le z) &= P(1 \le cX/10 \le z) \\ &= P(\tfrac{10}{c} \le X \le \tfrac{10z}{c}) \\ &= F(\tfrac{10z}{c}) - F(\tfrac{10}{c}) \\ &= \log_{10} \frac{10z}{c} - \log_{10}\frac{10}{c} \\ &= \log_{10} z + \log_{10}\frac{10}{c} - \log_{10}\frac{10}{c} \\ &= \log_{10} z, \end{aligned}$$

ذلك ما كان متوقعا. يمكن دراسة الحالات الأخرى بنفس الطريقة.

نلاحظ أن العكس مثير أكثر للاهتمام...

2. قانون بنفورد هو قانون الإحتمال الوحيد للجزء العشري الذي لا يتغير بتغيير السلم

يا له من عنوان مذهل! ورغم ذلك فبرهانه ليس أكثر تعقيدا من سابقه. ليكن X متغيرا عشوائيا يمثل الجزء العشري بقيم من المجال $[1,10)$. نبحث عن تابع توزيعه $F(x)$، بفرض أن X لا يتغير بتغيير السلم. إننا بحاجة إلى حساب

$$F(x) = P(X \le x) = P(1 \le X \le x).$$

ينبغي أن نحصل على $F(0) = 0$ و $F(10) = 1$.

الصعوبة الأساسية في البرهان تكمن في ترجمة ما يعنيه أن يبقى X ثابتا بتغيير السلم. فلما كان $1 \le X \le x$ و $c \le cX \le cx$ يعبران عن نفس الحدث فإن

$$(2) \qquad \mathrm{P}(1 \le X \le x) = P(c \le cX \le cx) = F(x).$$

كما فعلنا سابقا، نعتبر الحالة $c \in [1,10)$ بحيث $cx < 10$ (c متعلق بـــ x). زيادة على ذلك، من أجل $c \le cX \le cx$، cX يساوي جزءه العشري. بما أن X ثابت مهما تغير السلم، فالجزء العشري لـــ cX له نفس تابع توزيع X. إذن

$$\mathrm{P}(c \le cX \le cx) = F(cx) - F(c).$$

بمراعاة (2) نجد أن $F(x)$ تحقق

$$(3) \qquad F(x) = F(cx) - F(c), \ \mathrm{F}(1) = 0, \ \mathrm{F}(10) = 1$$

شريطة ألا يكون $c \in [1,10)$ كبيرا جدا. علينا إيجاد F انطلاقا من المعادلة التابعية (3). لنر كيف نقوم بهذا. إذا كان لدينا $c = 1 + \varepsilon$، فإننا نحصل على المساواة

$$F(x) = F(x(1+\varepsilon)) - F(1+\varepsilon)$$

التي يمكن كتابتها على الشكل

$$\frac{F(x(x+\varepsilon)) - F(x)}{x\,\varepsilon} = \frac{F(1+\varepsilon) - F(1)}{x\,\varepsilon}$$

لأن $F(1) = 0$. نأخذ النهاية لما $\varepsilon \to 0$. نحصل كنهاية في الطرفين على مشتق : من اليسار لدينا $\frac{F(x + x\varepsilon) - F(x)}{x\varepsilon}$ حيث النهاية هي $F'(x)$. ومن اليمين، لدينا $\frac{F(1+\varepsilon) - F(1)}{\varepsilon}$ الذي يؤول نحو $F'(1)$. بناءً عليه نحصل على المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة التالية

$$F'(x) = \frac{F'(1)}{x}$$

والتي حلها $F(x) = F'(1)\ln x + C$. باعتبار أن $F(1) = 0$ نستنتج $C = 0$، وبما أن $F(10) = 1$، ينتج $F'(x) = \frac{1}{\ln 10}$. ومنه $F(x) = \frac{\ln x}{\ln 10} = \log_{10} x$. وبهذا ينتهي البرهان!

3. لماذا الأرقام من كل الأصول تتبع قانون بنفورد؟

هناك جواب قُدم من طرف ثيودور هيل Theodore Hill سنة 1995، الذي سنناقش فكرته بإيجاز. من المؤكد، مجموعات الأعداد لا تتبع كلها قانون بنفورد. مثلا، إذا اعتبرنا طول الإنسان بالمتر، عدا بعض الاستثناءات، فسيكون الرقمان 1 و 2 هما أول رقمين دالين، أما إذا اخترنا أن يكون الطول بالقدم (يساوي القدم تقريبا 30 سم) فإننا سنضطر إلى تتغير قانون توزيع أول رقم دال. إذن مجموعة الأعداد هذه لا تبقى ثابتة بتغير السلم. من جهة أخرى، إذا اعتبرنا مجموعة أوسع من الأعداد ذات الأصول المختلفة، وقمنا بتغيير السلم، فسيكون لكل واحدة من مجموعاتها الجزئية سلمها الخاص. بما أن المجموعة كبيرة وأعدادها تأتي من جميع الأصول، فإنها تحوي على الأرجح جميع السلالم. بضرب كل عناصر المجموعة في عدد ثابت موجب نحصل على تبديلة من السلالم في المجموعة الجديدة. وهكذا، يمكن، بصفة عامة، اعتبار أن مجموعة الأرقام تتصرف كما لو أنه ليس لديها سلم خاص. فتكون بذلك خاضعة لقانون بنفورد.

هذا التفسير صالح عند اعتبار مجموعات الأعداد الآتية من جميع الأصول. لكنها لا تفسر لماذا تخضع مساحات البلدان وكثافاتها السكانية، أو أطوال الأنهار، لقانون بنفورد. سوف نناقش تفسيرات جد حديثة (2008!) لهذه الحالة، قدمت من طرف غوفريت Gauvrit ، وديلاهاي Delahaye وفيوستر Fewester... وهي تفسيرات تبقى سارية المفعول أيضا في مجموعات الأعداد الكبيرة التي تحوي جميع الأصول.

4. مجموعات الأعداد المعروضة وفق ترتيبات عديدة حسب أحجامها مرشحةٌ لاتباع قانون بنفورد !

بموجب عملنا في الأساس 10 استطعنا رؤية أن الأعداد الموجبة x يمكن أن تكتب على الشكل $x = m10^n$، حيث $m \in [1,10)$ و $n \in \mathbb{Z}$. يمكننا اعتبار أن n هو درجة كبر العدد، ونقول إن مستويات الكبر تختلف باختلاف قيم n في مجموعة أعدادنا. (لاحظ أن هذه الخاصية ليست متغيرة بتغير سلم القياس!) لتبسيط هذا التفسير، نفرض أن الأعداد تقع في المجال $[1,10^6)$. تنتمي الأعداد التي أول رقم دال فيها 1 إلى المجموعة

$$S_1 = [1,2) \cup [10,20) \cup [100,200) \cup [1000,2000) \cup [10^4, 2\times10^4) \cup [10^5, 2\times10^5).$$

وكذا بالنسبة للمجموعات المماثلة S_i من أجل الأرقام الأخرى. من الأفضل الانتقال إلى اللوغاريتم العشري لهذه الأعداد: $y = \log_{10}x$. فيكون $y = \log_{10}m + n$. سنثبت أنه إذا كان متغير عشوائي M من $[1,10)$ يتبع قانون بنفورد فإن المتغير العشوائي $Z = \log_{10}M$ بسيط الانتظام على $[0,1)$. وعليه، يكفي إثبات أن تابع توزيع Z مطابق لتابع توزيع المتغير العشوائي المنتظم على $[0,1)$، المعرف بـــ

$$F(z)=\begin{cases}0 & ,z<0\\ z & ,z\in[0,1)\\ 1 & ,z\geq 1.\end{cases}$$

بالفعل، لما $z\in[0,1)$ فإن

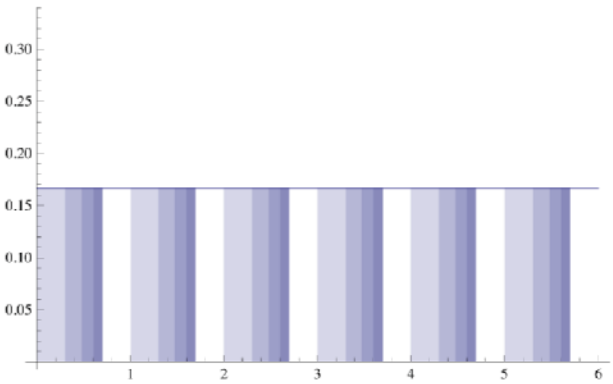
$$\mathrm{P}(Z\leq z)=P(0\leq \log_{10}M\leq z)=P(1\leq M\leq 10^{z})=\log_{10}10^{z}=z.$$

إذا انتمي X إلى المجموعة S_1، نلاحظ أن Y ينتمي إلى المجموعة $T_1=\log_{10}S_1$:

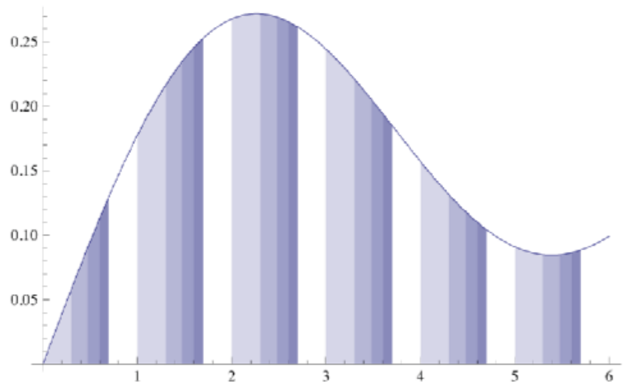
$$T_1=[0,\log_{10}2)\cup[1,1+\log_{10}2)\cup[2,2+\log_{10}2)\cup[3,3+\log_{10}2)\cup[4,4+\log_{10}2)\cup[5,5+\log_{10}2)$$

نتبع نفس الطريقة من أجل الأرقام الأخرى. لنفرض أن عملية أخذ رقم بصفة كيفية من مجموعتنا هو متغير عشوائي X يأخذ قيمه في $[1,10^6)$. عندئذ يكون $Y=\log_{10}X$ في $[0,6)$. نُذكّر أن احتمال انتماء متغير عشوائي إلى مجموعة ما يساوي المساحة الواقعة بين منحني تابع الكثافة وهذه المجموعة. لو كان تابع الكثافة f لـــ Y على $[0,6)$ منتظما كما هو مبين في الشكل 3 (أ) لكُنا أنهينا التوضيح. لكن، ليس هذا ما يحدث غالبا، كما هو موضح في الشكل 3 (ب).

لهذا السبب من المهم جدا أن تكون مجموعة أعداد الانطلاق معروضة على مستويات عديدة من الأحجام. إن الأجزاء المختلفة الموافقة لرقم معين i معطى، معروضة أفقيا على عدة قطع مستقيمة، حيث مجموع أطوالها يكون في نفس رتبة $\log_{10}(1+\frac{1}{i})$ من المجموع الكلي للأطوال. على الرغم من أن ارتفاع $f(x)$ يختلف من قطعة مستقيمة إلى أخرى فإننا نأمل أن يكون متوسط الارتفاع من نفس درجة كبر الأعداد المختلفة. وعندما يحدث هذا، فإن المعطيات ستخضع لقانون بنفورد.



(أ)



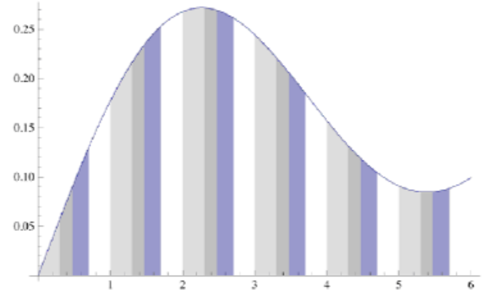
(ب)

(أ) تابع الكثافة المنتظمة لـــ f

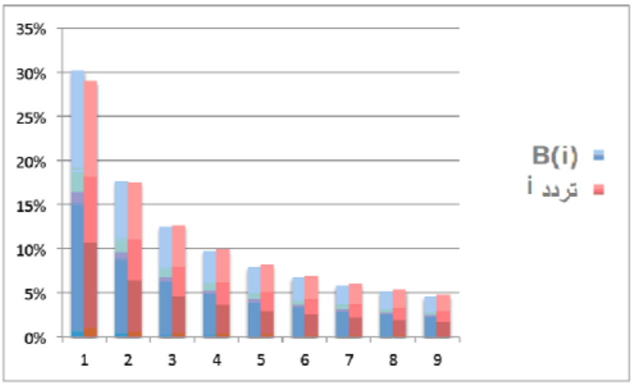
(ب) تابع الكثافة غير المنتظمة لـــ f

الشكل3 : المساحات الموافقة لترددات الأرقام الأولى 1، 2، 3 و 4 من أجل تابعين مختلفين للكثافة لـــ Y.

قيم المساحات الموافقة مبينة في الشكل 4 أدناه.



(أ)



(ب)

(أ) تابع كثافة f

(ب) المساحات تحت البيان من أجل الأرقام الأولى لـــ f ومن أجل الدالة المنتظمة

الشكل4: المساحات الموافقة لتواترات الأرقام الأولى 1، 2 ، 3 ، 4 من أجل تابع كثافة الشكل 3 (ب).

من الجهة اليمنى يمكن رؤية أن قيمها قريبة من تلك التي تحصلنا عليها من قانون بنفورد في حالة تابع كثافة منتظم لـــ Y.

5. كيف يمكن التأكد من أن مجموعة أعداد تخضع لقانون بنفورد؟

إذا قمتم بدراسة الإحصاء، فإنكم على الأغلب تعرفون قانون χ^2، هذا الاختبار يُمَكِّنكم من التحقق مما إذا كانت بعض المعطيات تتبع قانونا احتماليا معينا. بافتراض أنكم تريدون إجراء الاختبار على مجموعة مكونة من n عددا فأنتم بحاجة لإنشاء جدول بحيث تمثل فيه n_i عدد الأعداد (في مجموعتكم) التي يكون أول رقم دال فيها هو i. من الواضح أن $n = n_1 + ... + n_9$. أما N_i فتمثل عدد الأعداد التي يكون أول رقم دال فيها هو i إذا كانت مجموعتكم تتبع قانون بنفورد. نلاحظ أن N_i معرف بـــ $N_i = nB(i)$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9
N_i	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9

الجدول 2 : جدول قانون χ^2

ثم تحسبون

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{(n_i - N_i)^2}{N_i} .$$

بعدها تنظرون في جدول χ^2 إلى السطر الموافق لدرجة الحرية 8. إذا أردتم إجراء اختبار بـــ 5% من الخطأ، فستقبلون بالنتيجة القائلة إن المعطيات تخضع لقانون بنفورد إذا كان $\chi^2 < 15.51$، وإلا فلا خضوع لهذا القانون. هذه وصفة سريعة، لكن إن أردتم القيام بهذا الاختبار مع طلابكم، خذوا الوقت الكافي للإطلاع على تفاصيل الاختبار ومعناه.

6. ثبات قانون بنفورد بتغيير الأساس

هذه المسألة يمكن نمذجتها بطريقة مماثلة لحال الثبات بتغيير سلم القياس، لكن الأمر هنا أكثر صعوبة، لأنه لا يمكننا أن نقتصر العمل فقط على الجزء العشري. فإذا كان $x = m10^n$، فإن الجزء 10^n بحاجة أيضا ليُحوّل إلى الأساس الجديد. في الحقيقة، الصعوبة الأساسية تكمن في التعبير الرياضي عما يعنيه استقلال متغير عشوائي عن تغيير الأساس. سوف نتجاوز التفاصيل.

7. خاتمة

قانون بنفورد قانون ساحر: إنه يتجاوز الحدس، وهو أمر يمكنكم اختباره بأنفسكم وتبنيه كنشاط في القسم.

كان الأمر يتعلق بمسألة فضولية لكنها صارت اليوم أداة مرجعية لاكتشاف التزوير، وبطبيعة الحال أصبح المزورون يتعرفون أكثر فأكثر على هذا القانون. لكن انتبهوا : أول رقم دال ليس الشيء الوحيد الذي يجب الانتباه إليه. فقانون بنفورد المعمم يسمح بإيجاد قانون خاص بالرقم الثاني الدال، والثالث الدال، إلخ. يمكنكم محاولة إيجاده بأنفسكم: يكفي إيجاد اتحاد المجالات التي ينبغي أن ينتمي إليها الجزء العشري لعدد حتى يكون رقمه الثاني هو i.

تقاسم هذا على:

- Email
- **طباعة**
- Facebook
- Twitter

هذا المقال متوفر أيضا بـــ: الانجليزية، الفرنسية، الإيطالية، الإسبانية، برتغالية–البرازيل.

أرسل الموضوع على شكل PDF أدخل عنوان البريد الإلكتروني ابعث

اترك تعقيبًا

بريدك الإلكتروني لن ينشر . الحقول المطلوبة مسجلة*

الاسم*

البريد الالكتروني*

الموقع الإلكترني

التعقيب

You may use these HTML tags and attributes: <a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>

أرسل التعقيب

- [ ] أشعروني بجديد التعقيبات على البريد الإلكتروني.
- [ ] أشعروني بالمقالات الجديدة عبر البريد الإلكتروني.