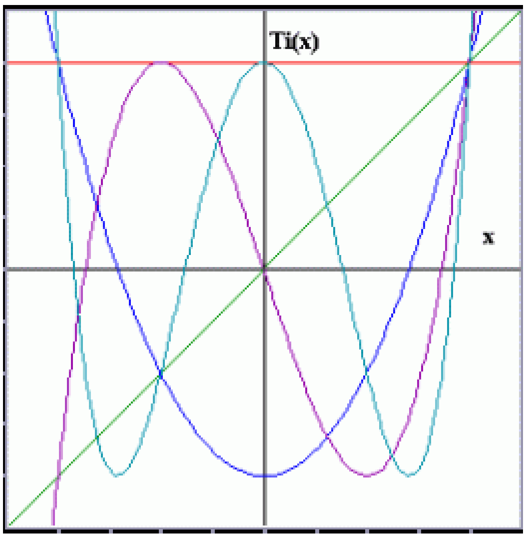
الآلات الحاسبة، وسلاسل القوى، وكثيرات حدود شيبيتشاف Chebyshev

بقلم : غريم كوهين Graeme Cohen

من بين كل الدوال المألوفة، سيما المثلثية والأسية واللوغاريتمية، فإنه من المؤكد أن الدوال كثيرات الحدود هي الأبسط في التقدير والتقريب. يتضمن هذا المقال مفهوم سلاسل القوى (أو السلاسل الصحيحة) التي يمكن اعتبارها دالة كثيرة حدود من الدرجة اللانهائية، كما يقدّم تطبيقاتها في موضوع تقدير الدوال بالآلة الحاسبة. عندما تعطي الآلة الحاسبة قيم الدوال المثلثية أو الأسية أو اللوغاريتمية، فالوسيلة الأبسط هي تقدير الدوال كثيرة الحدود المحصل عليها ببتْر سلسلة القوى لأنها تمثل هذه الدوال بالتقريب الكافي.

لكننا غالبا ما نجد طرقا أفضل لهذا الأداء. سنوضح بوجه خاص كيف نستنتج سلسلة قوى لـــ $\sin x$، وسنرى كيف نحسن المقاربة المباشرة للحصول على القيم التقريبية. سيجرنا ذلك إلى اعتبار كثيرات حدود شيبيتشاف Chebyshev التي تُستخدم بعدة طرق في مثل هذه المواضيع وفي تطبيقات كثيرة أخرى (بالنسبة للدوال المثلثية فإن خوارزمية "كورديك" Cordic (اختصار لـــ "الحساب العددي بدوران الإحداثيات" ***CO**ordinate **R**otation **DI**gital* ***C**omputer*) هي في الواقع الطريقة المفضلة في أغلب الأحيان في باب التقدير– وهذا الموضوع ربما تُخَصص له مقالة في هذا الموقع).



وتماشيا مع فكر فيليكس كلاين Felix Klein، فسنعتمد على بعض المقاربات البيانية. وما عدا ذلك سوف لن نحتاج سوى لبعض القواعد الأساسية في الحساب المثلثي والحساب العام.

المعالجة بالسلسلة الهندسية

السلسلة الهندسية $1+x+x^2+x^3+...$ هي أبسط سلسلة قوى. يكون مجموعها موجودا لما $|x|<1$. بالفعل، لمـــا $|x|<1$ نجد :

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}. \qquad (1)$$

الشكل العام لسلسلة القوى هو :

$$\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots$$

ومن ثمّ فالسلسلة الهندسية أعلاه هي سلسلة قوى معاملاتها $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots$ مساوية لـــ 1. في هذه الحالة تتقارب السلسلة نحو $\frac{1}{1-x}$ لما $|x|<1$.

نقول عندئذ إن نشر الدالة f المعرفة بـــ

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \quad (\text{حيث } |x|<1)$$

وفق سلسلة قوى هو $1+x+x^2+x^3+\ldots$، أو إن f ممثّلة بهذه السلسلة. نحن مهتمون في البداية بتقديم بعض الدوال الأخرى التي يمكن تمثيلها بسلسلة قوى.

يمكن الحصول على العديد من هذه الدوال مباشرة من النتيجة (1). نستطيع مثلا تعويض x بـــ $-x^2$ فنحصل على تمثيل بسلسلة للدالة $\frac{1}{1+x^2}$:

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\frac{1}{1+x^2} \qquad (2)$$

وهذا لما $|x|<1$. كما يمكننا اشتقاق طرفي المساواة (1) للحصول على سلسلة تمثل الدالة $\frac{1}{(1-x)^2}$:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

لما $|x|<1$.

ونستطيع أيضا مكاملة طرفي المساواة (1). نضرب طرفيها في -1 (للتبسيط)، ثم نستبدل المتغير x بالمتغير t، ونكامل الطرفين بالنسبة إلى t من 0 إلى x، وهذا لما $|x|<1$:

$$-\int_0^x\left(1+t+t^2+t^3+\ldots\right)dt=-\int_0^x\frac{dt}{1-t}.$$

وبذلك نصل إلى النشر :

$$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots=\log(1-x)$$

لما $|x|<1$. تلك هي السلسلة الممثّلة للدالة $\log(1-x)$ من أجل $|x|<1$. بنفس الطريقة، وانطلاقا من العلاقة (2)، ينتج :

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\tan^{-1}x \qquad (3)$$

لما $|x|<1$. هناك العديد من الخطوات السابقة (واللاحقة) تتطلب تبريرا، لكننا نترك ذلك للكتب المدرسية.

سلسلة قوى دالة "جيب"

نهتم الآن بكيفية إيجاد سلسلة القوى الممثلة للدالة $\sin x$. بصفة عامة، يمكننا أن نكتب :

$$\sin x=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots \qquad (4)$$

والآن نضع فيها $x=0$ ، فنجد أن $\alpha_0=0$. نقوم باشتقاق طرفي المساواة (4) فينتج:

$$\cos x=\alpha_1+2\alpha_2 x+3\alpha_3 x^2+4\alpha_4 x^3+\ldots$$

نضع من جديد $x=0$ فنتأكد من أن $\alpha_1=1$. نواصل الاشتقاق ووضع $x=0$:

$$-\sin x=2\alpha_2+3.2\alpha_3 x+4.3\alpha_4 x^2+5.4\alpha_5 x^3+\ldots$$

فيتبيّن أن $\alpha_2=0$. ثم إن

$$-\cos x=3.2\alpha_3+4.3.2\alpha_4 x+5.4.3\alpha_5 x^2+6.5.4\alpha_6 x^3+\ldots$$

ومنه : $\alpha_3=\dfrac{-1}{3.2}=\dfrac{-1}{3!}$ ، ومرة أخرى نشتق فيكون

$$\sin x=4.3.2\alpha_4+5.4.3.2\alpha_5 x+6.5.4.3\alpha_6 x^2+\ldots$$

عندئذ : $\alpha_4=0$. لدينا أيضا :

$$\cos x=5.4.3.2\alpha_5+6.5.4.3.2\alpha_6 x+7.6.5.4.3x^2+\ldots$$

نستخلص من ذلك $\alpha_5=\dfrac{1}{5.4.3.2}=\dfrac{1}{5!}$.

بهذه الطريقة يمكننا أن نجد قيم جميع المعاملات $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ، وهي تعطى بـــــ :

$$\alpha_{2n}=0 \qquad ، \alpha_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

وذلك من أجل : $n=0,1,2\ldots$. نلاحظ أنه يتم تحديد المعاملات التي لها دليل زوجي على حدة، وكذلك الأمر بالنسبة لتلك ذات الدليل الفردي. وبالتالي :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ldots .$$

تلك هي سلسلة القوى المعروفة الممثِّلة للدالة $\sin x$. بالطريقة التي اتبعناها في إيجاد هذه السلسلة، من المنطقي أن تكون السلسلة التي تمثل $\sin x$ صالحة من أجل قيم x المجاورة لــ 0 ($|x|<1$ كما في الأمثلة السابقة). وعليه فمن المدهش أن نلاحظ رغم ذلك أن السلسلة التي تمثل $\sin x$ تظل صالحة من أجل كل قيم x . نحصل على المجاميع الجزئية لهذه السلسلة بالتوقف بعد عدد منته من الحدود. ذلك يعطينا دوال كثيرات حدود يمكن استخدامها في إيجاد قيم مقرّبة لدالة "الجيب" مثل التي يمكن أن نجدها في الجداول المثلثية أو في الآلات الحاسبة.

التقريب بواسطة كثيرات حدود تشبيشيف

على سبيل المثال، نكتب المجموعين الجزئيين

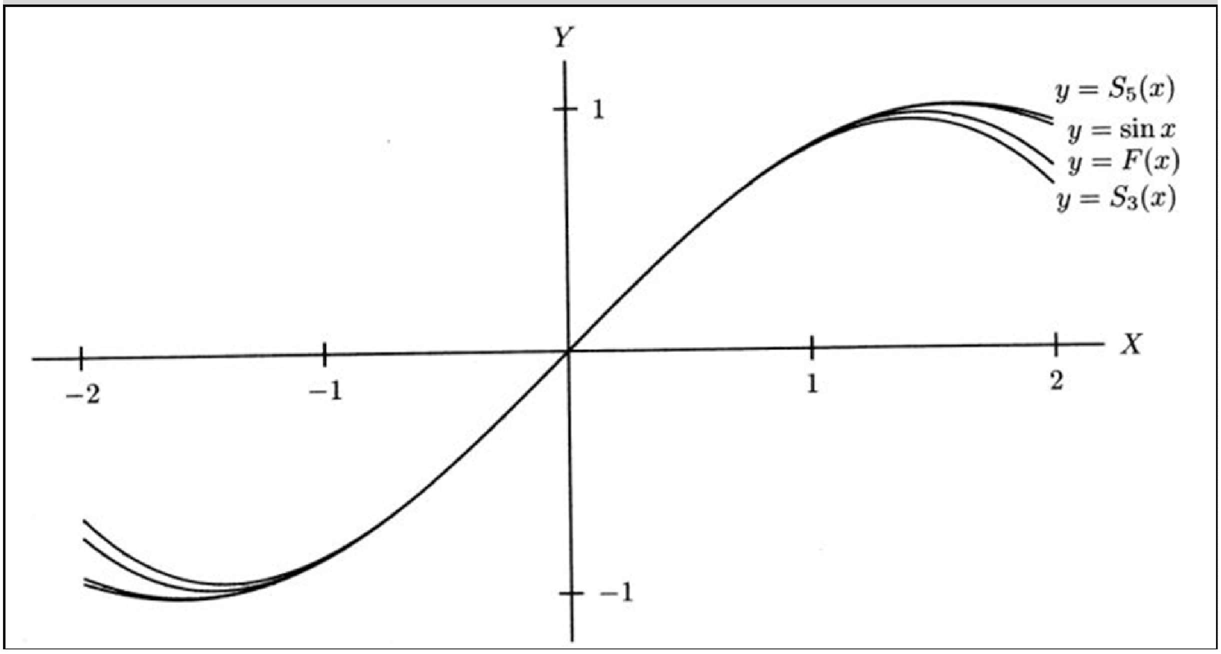
$$S_3(x)=x-\frac{x^3}{3!} \quad \text{و} \quad S_5(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!} .$$

إن كثير الحدود من الدرجة الثالثة $S_3(x)$ وكثير الحدود من الدرجة الخامسة $S_5(x)$ منحنياهما مرسومان أدناه مع منحنى الدالة $\sin x$ في المجال $-2\le x\le 2$. نرى أنهما أحسن تقريبين لها من أجل $-1\le x\le 1$. ولكنهما ليسا كذلك بجوار $x=\pm 2$. ونلاحظ أن كثير الحدود $S_5(x)$ أفضل بكثير من $S_3(x)$ كتقريب خارج هذا المجال. سؤال : هل نستطيع تقريب دالة الجيب بكثير حدود آخر من الدرجة الثالثة أفضل من $S_3(x)$ ؟

لما $x=1$ مثلا فالخطأ المرتكب باستخدام $S_3(x)$ هو :

$$\sin 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)\approx 0.0081$$

سنقوم بإنشاء كثير حدود من الدرجة 3، نرمز له بـــ F ، قيمه تختلف عن قيم $\sin x$ بأقل من 0.001 من أجل $|x|\le 1$. المنحنى $y=F(x)$ مرسوم في الشكل أدناه من أجل $|x|\le 2$، ويتضح من هذا البيان أن هذا المنحنى هـــو الأقرب لمنحنى $y=\sin x$ من $y=S_3(x)$ ، وهذا حتى بجوار $x=\pm 2$.



نستخدم كثيرات حدود شبيشيف لإنشاء F ، فهي تستخدم على نطاق واسع في مسائل التقريبات كما فعلنا سابقا.

إنها الدوال T_k المعرّفة بـــ

$$T_k(x)=\cos k\theta$$

حيث $x=\cos\theta$ ، وذلك من أجل العدد الصحيح الموجب $0\le k$ (يمكن أن نكتب $T_k(x)=\cos(k\cos^{-1}x)$).

باستخدام خواص "جيب التمام" نرى أن كل الدوال T_k معرفة على $[-1,1]$ وتأخذ صورها فيه. بوضع $k=0$ و $k=1$ نحصل على :

$$T_0(x)=1 \text{ ،} T_1(x)=x .$$

لكنه ليس من الواضح أن T_k كثيرات حدود فعلاً من أجل $k\ge 2$. لرؤية ذلك نذكّر أن :

$$\cos(k+1)\theta=\cos(k\theta+\theta)=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta,$$
$$\cos(k-1)\theta=\cos(k\theta-\theta)=\cos k\theta\cos\theta+\sin k\theta\sin\theta.$$

بجمع العبارتين طرفا لطرف نجد أن :

$$\cos(k+1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta .$$

ومنه يكون :

$$T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x)$$

لما $1\le k$.

الآن، نضع $k=1,2,3,\ldots$ فيأتي :

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

(5) $$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

(6) $$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

وهكذا دواليك. نحصل في كل مرة على كثير حدود. والمُلاحَظ أننا لسنا بحاجة إلى اقتصار مجموعات تعريف هذه الدوال على المجال $[-1,1]$ لأن الأمر يتعلق هنا بكثيرات حدود. نعود إلى مسألتنا المرتبطة بتقريب الدالة $\sin x$ من أجل $|x| \le 1$ بخطأ أقل من 0.001. نشير إلى أن الدالة الخماسية $S_5(x)$ تفي بهذا الشرط، ولدينا :

(7) $$\left|\sin 1 - S_5(1)\right| = \left|\sin 1 - (1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120})\right| < 0.0002$$

من جهة أخرى يتبيّن من نظرية السلاسل المتناوبة أن :

$$\left|\mathrm{sinx} - S_5(x)\right| < 0.0002$$

مهما كان x في المجال $[-1,1]$، وهو ما يظهر بوضوح في الشكل. نستخلص فيما يلي عبارة $S_5(x)$ بدلالة كثيرات حدود شبيتشيف. باستخدام العلاقتين (5) و (6) يأتي :

$$x = T_1(x),$$
$$\mathrm{x}^3 = \frac{1}{4}(T_3(x) + 3x) = \frac{1}{4}(T_3(x) + 3T_1(x)),$$
$$\mathrm{x}^5 = \frac{1}{16}(T_5(x) + 20x^3 - 5x) = \frac{1}{16}(T_5(x) + 5T_3(x) + 10T_1(x)).$$

إذن

$$\begin{aligned} S_5(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ &= T_1(x) - \frac{1}{6}.\frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x)) + \frac{1}{120}.\frac{1}{16}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)) \\ &= \frac{169}{192}T_1(x) - \frac{5}{128}T_3(x) + \frac{1}{1920}T_5(x). \end{aligned}$$

بما أن $|T_5(x)| \le 1$ لما $|x| \le 1$ فإهمال الحد $\frac{1}{1920}T_5(x)$ يؤدي إلى خطأ لا يتجاوز $\frac{1}{1920} < 0.0006$، وهذا يؤدي، باستخدام العلقة (7)، إلى خطأ إجمالي أقل من 0.0008. لاحظ أنه لا يتجاوز المقدار 0.001 الذي أشرنا إليه أعلاه . الآن نكتب :

$$\begin{aligned} \frac{169}{192}T_1(x) - \frac{5}{128}T_3(x) &= \frac{169}{192}x - \frac{5}{128}(4x^3 - 3x) \\ &= \frac{383}{384}x - \frac{5}{32}x^3 \end{aligned}$$

علما أن الطرف الأخير هو الدالة من الدرجة الثالثة التي نسميها F.

وبالتالي نكون قد أثبتنا جزئيا، من خلال التبرير البياني، أن عبارة الدالة الثلاثية الحدود F هي :

$$F(x) = \frac{383}{384}x - \frac{5}{32}x^3$$

الأقرب إلى $\sin x$، من أجل $|x| \le 2$، من الدالة ثلاثية الحدود $x - \frac{1}{6}x^3$ المأخوذة من سلسلة القوى الممثلة لـــ $\sin x$.

خلاصة: العِبْرة من الموضوع

إن فعالية كثيرات حدود شبيشيف في هذا العرض ناتجة جزئيا من خصائص دالة "جيب التمام". هذا يؤدي من أجل كل عدد صحيح موجب k و $|x| \leq 2$ أن لدينا : $|T_k(x)| \leq 1$.

بافنوتي لفوفيتش تشبيتشيف Pafnuty Lvovich Chebyshev، الذي يكتب اسمه أيضا تشبيشيف Tchebycheff، هو روسي أدخل هذه الدوال كثيرة الحدود المعروفة باسمه في بحث قدمه سنة 1854. وقد رُمِز إليها بـ T_k نسبة إلى الحرف الأول من اسمه Tchebycheff.

تعرف الطريقة التي أوجزناها آنفا باسم "اقتصاد سلاسل القوى" Economization of power series، وهي تدرس في فرع من فروع الرياضيات يدعى التحليل العددي. نشير إلى أن طريقة "اقتصاد سلاسل القوى" ليست دوما ضرورية لتقدير دالة "الجيب" لأن $\sin x$ تساوي بالتقريب x عندما يكون $|x|$ صغيرا، وهذا في أغلب الأحيان جدّ كاف! للاستزادة، أنظر مقالة تشوك آليزون Chuck Allison في الموقع

http://jetlib.com/mirrors/uvu.freshsources.com/page1/page2/page5/files/sine.pdf

أشرنا في البداية إلى أن خوارزمية "كورديك" هي في الغالب الأفضل، ولكن تقدير دوال أخرى على الآلة الحاسبة (سيما الدالة "قوس الظل" $\tan^{-1} x$ التي تتميز بنشر وفق سلسلة قوى يتقارب ببطء) بطريقة "اقتصاد سلاسل القوى" المبيّنة في العلاقة (3) أمر يعتبر أساسيا.

لعل بيت القصيد هنا هو أن النتيجة البديهية غالبا ما يمكن تحسينها.

تقاسم هذا على:

- Email
- **طباعة**
- Facebook
- Twitter

هذا المقال متوفر أيضا بـــ: الانجليزية، والألمانية.

أرسل الموضوع على شكل PDF أدخل عنوان البريد الإلكتروني ابعث

اترك تعقيبًا

بريدك الإلكتروني لن ينشر. الحقول المطلوبة مسجلة *

الاسم *

البريد الالكتروني *

الموقع الإلكتروني

You may use these HTML tags and attributes: <a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>

أرسل التعقيب

أشعروني بجديد التعقيبات على البريد الإلكتروني.

أشعروني بالمقالات الجديدة عبر البريد الإلكتروني.