تصنيف الكائنات

بقلم : كريستيان روسو Christiane Rousseau

ترجمة : عبد الهادي واقيد، يزيد قواري، ياسين مفتاح

توفّر الرياضيات عدة أدوات لتصنيف الكائنات، لكن هل لذلك أي استعمال عملي؟ نعم، بل هناك استعمال أكثر مما يمكن تخيّله لأول وهلة... فقد يسمح لنا باستنتاج أن عقدة لا يمكن أن تفكّ دون قطع الخيط، بغض النظر عن كيفية تحريكه في الفضاء. يمكن أن يخبرك التصنيفُ أيضا عن احتمال خطئك في تجميع مربعات مكعّب روبيك Rubik بعد تفكيكه إلى قطع، كما يستطيع تنبيهك بأنه لا جدوى من الطريقة التي تكون قد سلكتها.

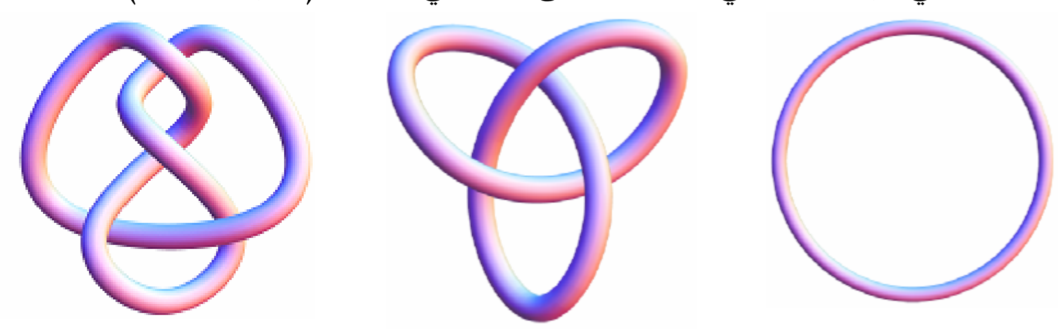
من الناحية العملية، تصنيف الكائنات يعني وضعها في مجموعات، كل واحدة منها تضم كائنات لها خواص مشتركة. إن إحدى الطرق الفعالة للقيام بذلك هي التصنيف عن طريق علاقة تكافؤ. عندئذ، سينتمي كل كائن إلى صف تكافؤ معيّن. لكن، هذا لا يعني أننا نملك طريقة فعالة لوصف صفّ تكافؤ !

المفهوم الرياضي للصمود يوفّر طريقة فعالة للقيام بذلك لأن "الصامد" هو كائن رياضي (قد يكون مجرد عدد) يظل هو نفسه من أجل كل عناصر صف التكافؤ. بعدها، من خلال مجموعة هذه الكائنات الصامدة، نميّز تلك التي تشكل صف تكافؤ. نستطيع أن نخصّ بالذكر، من بين تلك الصوامد، "الصوامد التامة" التي تميّز صف التكافؤ.

في هذه المقالة القصيرة، سنعمل في أغلب الأحيان على الإتيان بأمثلة، وسنرى كيف أن مفهوم الصمود مفهوم واسع الانتشار في الرياضيات، خاصة في الجبر والهندسة. عندئذ ستكون قادرا على إضافة أمثلتك الخاصة.

الحد الأدنى لتقاطعات عقدة

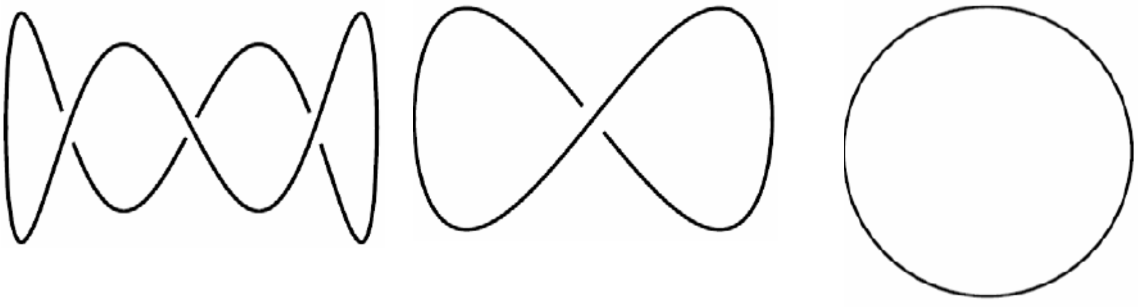
العقدة في الرياضيات هي ببساطة منحنى مغلق في الفضاء (أنظر الشكل 1).



(أ) منحنى دون عقد — (ب) البرسيم — (جـ) الشكل الثماني

الشكل 1 : ثلاث عقد في الفضاء. أقل عدد من التقاطعات للبرسيم هو 3، وبالنسبة للشكل الثماني فهو 4.

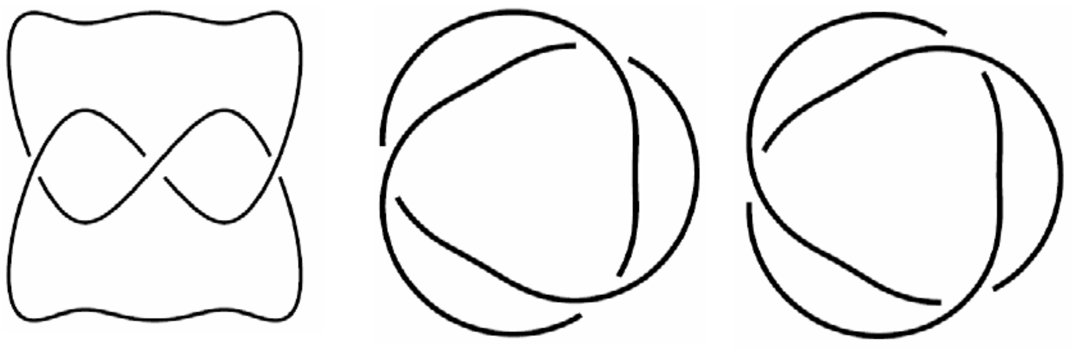
جرت العادة على أن نمثل ذلك برسم في مستوي يُظهر التقاطعات حيث يمكن أن نرى الأجزاء العلوية والسفلية كما في الشكلين 2 و 3.



(جـ) (ب) (أ)

الشكل 2 : ثلاثة تمثيلات للعقدة الأولية 4.

يمثل الشكل 2-(أ) العقدة الأولية بدون تقاطع. بطبيعة الحال، إذا كانت العقدة خيطا، يمكن أن تحركه في الفضاء وترسم عدة تمثيلات لعدة تقاطعات كما في (ب) و (جـ).



(جـ) البرسيم اليساري (ب) البرسيم اليميني (أ) البرسيم اليساري

الشكل 3 : البرسيم اليساري في (أ) و (جـ) لا يمكن أن يحوَّل إلى البرسيم اليميني في (ب).

يمثل الشكل 3 عقدة البرسيم اليساري بثلاثة تقاطعات. إنه من غير الممكن تمثيلها بأقل من 3 تقاطعات، وبرهان هذا ليس سهلا لذا سنتجاوزه في هذا المقام. هناك طرق مختلفة لتمثيل عقدة. في الواقع، الشكلان 3-(أ) و 3-(جـ) هما تمثيلان لنفس العقدة.

حتى الآن، لا زلنا لم نعرَف علاقة التكافؤ بين العقد، غير أننا استعملناها ضمنيا. العلاقة التي سنستعملها تنصُّ على أن عقدتين تكونان متكافئتين إذا أمكن تحويل إحداهما إلى الأخرى بتحريك العقدة

في الفضاء بالتمديد أو بالضغط. حسب علاقة التكافؤ هذه، سيكون أقل عدد من التقاطعات عنصرا صامدا. هناك صنفاَ تكافؤ للعُقَد يكون من أجلها الحد الأدنى للتقاطعات هو 3 : البرسيم اليميني والبرسيم اليساري في الشكل 3 غير متكافئين. هنا أيضا، البرهان النظري على هذه النتيجة ليس بسيطا. هذا يعني أن العدد الأصغر من التقاطعات ليس كافياً لتصنيف العُقد وفق علاقة التكافؤ المذكورة. هذا يقودنا إلى تعريف "الصامد التام".

يكون صامدٌ تامًا إذا تحقق الشرط : يكون كائنان متكافئين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الصامد التام. إن الحد الأدنى لتقاطعات عقدة ليس صامداً تامًا لأن البرسيمين اليميني واليساري غير متكافئين على الرغم من أنهما يملكان نفس الحد الأدنى من التقاطعات، وهو 3. لكن ذلك يسمح لنا بأن نقرر أن البرسيم لا يكافئ العقدة الأولية.

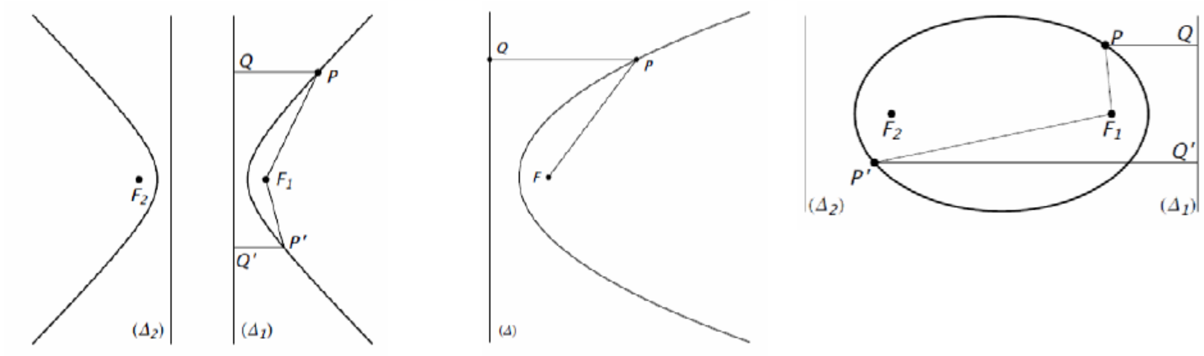
كقاعدة عامة، إذا لم يكن لكائنين نفس الصامد (أو الصوامد)، فهما غير متكافئين.

التباعد المركزي قطع مخروطي

دعنا نعود إلى التعريف غير المألوف لقطع مخروطي ذي بؤرة ودليل. لتكن F نقطة و D مستقيما لا يمر من F و e عددا موجبا. القطع المخروطي ذو البؤرة P والدليل D والتباعد المركزي e هو محل هندسي: مجموعة النقط التي تكون فيها نسبة المسافات بالنسبة لـ P و D تساوي e. وبصفة أدق، إذا كانت P نقطة من المستوي وكانت Q هي مسقط P على D فإن P تقع على القطع المخروطي إذا وفقط إذا تحققت المساواة (انظر الشكل 5)

$$\frac{|PF|}{|PQ|} = e \,. \qquad (1)$$

الشكل 4: أشكال ناقصية متعددة. الأشكال التي لها نفس اللون تملك نفس التباعد المركزي.



(أ) قطع ناقص (ب) قطع مكافئ (جـ) قطع زائد

الشكل 5 : تعريف القطع المخروطي بتباعده المركزي.

إن التباعد المركزي هو وصف لشكل القطع المخروطي (أنظر الشكل 4). إنه صامد باعتبار علاقة التكافؤ التي تحافظ على الشكل. ماذا يمكن أن تكون علاقة تكافؤ من هذا القبيل؟ إنها التحويل المسمى "التشابه".

التشابه تحويل تآلفي يحافظ على الزوايا. باستعمال الأعداد العقدية، يمكن أن نعرفه بالصيغة $z \to \alpha z + b$ إن كان يحافظ على الاتجاه، وبالصيغة $z \to \alpha \bar{z} + b$ إن كان يعكس الاتجاهات. يكون شكلان في المستوي متشابهين إذا كان أحدهما صورة للآخر بتحويل من هذا النوع (تشابه).

الملاحَظ في هذا التعريف للقطع المخروطي بواسطة العلاقة (1) هو أنه يعطي برهانا بسيطا على أنّ قطعين مخروطين يكونان متشابهين إذا وفقط إذا كان لهما نفس التباعد المركزي. بالفعل، التشابه يحفظ المستقيمات، وكذا نسب المسافات والإسقاطات العمودية. ولذلك، فمجموعة النقط التي تحقق (1) تتحوّل بواسطة تشابه إلى مجموعة النقط P'' التي تحقق $\left|\frac{P''F''}{P''Q''}\right| = e$، حيث F'' هي صورة F و Q'' هي مسقط P'' على D'' (صورة المستقيم D). كحالة خاصة، يتضح أن كل القطوع المكافئة متشابهة.

بُعد فضاء طبولوجي

الفضاء الطبولوجي هو، باختصار، كائن هندسي مكوّن من مجموعة نقط مزوّدة بمجموعة جوارات لكل نقطة. إذن، فالنقاط الواقعة في جوار نقطة P ستكون قريبة من P. ومن جهة أخرى، فكل تابع مستمر بين فضاءين طبولوجيين ينقل النقط القريبة من بعضها البعض إلى نقط أخرى متجاورة أيضا. نريد أن نعرّف مفهوما للتكافؤ (علاقة التكافؤ) بين الفضاءات الطبولوجية يعبر عن الخاصية التالية : نفرض أن الفضاء الطبولوجي مكوّن من مواد مطّاطية يمكننا إعادة تشكيلها بالتمديد أو

الضغط، وذلك دون تمزّق المادة المطاطية. حينها نقول إن الفضاء (الشكل) الابتدائي والفضاء (الشكل) النهائي متكافئان. إن علاقة التكافؤ التي تعكس هذه الخاصية هي مفهوم الفضاءات الطبولوجية المستشاكلة (الهوميومورفية) .

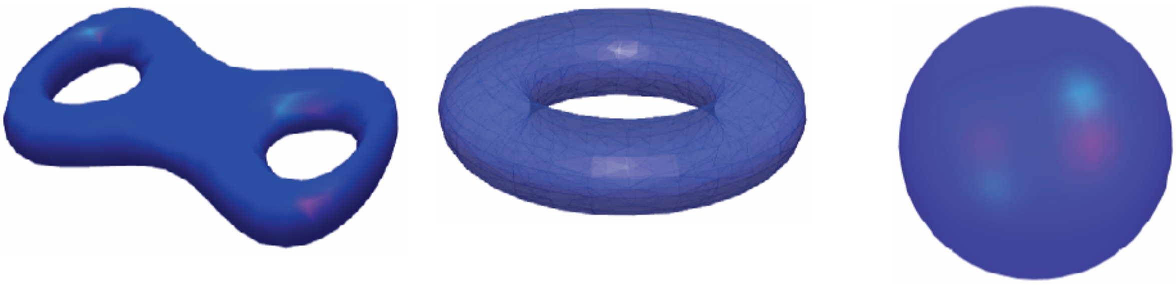
نقول عن فضاءين طبولوجيين X و Y إنهما مستشاكلان إذا وجد تقابل $F:X\to Y$ بينهما، مستمر ومعكوسه مستمر. نقول حينئذ إن F مستشاكل بين X و Y.

الآن، يكون بالإمكان تعريف مفهوم بعد فضاء طبولوجي. إن كيفية تعريف بعد فضاء طبولوجي أمر دقيق، ولن نخوض في تفاصيله. في الحالة الخاصة التي يكون فيها الفضاء الطبولوجي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$، ننصح القارئ بمقالة كلاين القصيرة المعنونة "البعد" Dimension.

وحتى نقرب حدسيا هذا المفهوم نقول إن المنحنى بعده 1، والسطح بعده 2، والحجم بعده 3. وهكذا فسطح الكرة بعده 2، والكرة المملوءة بعدها 3. والمهم في هذا الموضوع أن بعدَ فضاء طوبولوجي كائنٌ صامدٌ بعلاقة التكافؤ التي عرفناها آنفا. فالمستقيم ليس مستشاكلا مع المستوي. ثم إن البعد ليس تام الصمود لأننا نلاحظ مثلا أن المستقيم والدائرة لهما نفس البعد 1، مع أنهما ليسا مستشاكلين.

جنس سطح

نهتم الآن بالسطوح، ونقتصر على السطوح المحدودة والمغلقة. هناك أمثلة في الشكل 6.



(أ) سطح كرة (ب) طارة (جـ) طارة مزدوجة

الشكل 6 : سطح كرة، طارة، طارة مزدوجة.

لهذه السطوح مستوى مماس في كل نقطة. نقول في هذه الحالة إنها قابلة للمفاضلة وإنها قابلة للتوجيه، وهذا يعني أن لها وجهين داخليا وخارجيا. نريد أن نعرّف مفهوم تكافؤ بين السطوح القابلة للمفاضلة : سطحان قابلان للمفاضلة X و Y يكونان مُتَفاتشاكلين (دِفِيُمورفيزم) إذا وجد تقابل $F:X\to Y$ قابل للمفاضلة (رغم أننا لم نذكر كيف نعرّف قابلية المفاضلة لتطبيق بين سطحين).

يمكن البرهان في هذه الحالة بالذات على أن سطحين قابلين للمفاضلة يكونان متفاتشاكليين إذا وفقط إذا كانا مستشاكلين.

يمكن في هذه الحالة تعريف الصامد التام: وهو جنس السطح. دعنا نلقي نظرة مجددًا على السطوح الظاهرة في الشكل 6. كل واحد من هذه السطوح يرتبط عبر مستشاكل بسطح كرة ذي مقابض : 0 مقبض بالنسبة لسطح الكرة، مقبض واحد بالنسبة للطارة، مقبضان بالنسبة للطارة المزدوجة، الخ. الجنس هو ببساطة عدد المقابض. القول بأن الجنس هو صامد تام قول يحمل معنى عميق جدا : فهو يؤدي إلى القول بأن سطحا مغلقا ومحدودا وقابلا للتوجيه تفاتشاكلي مع سطح كرة بـ n مقبضا أو، رمزًا، مع $n-$ طارة.

بالنسبة للذين اطلعوا على مميّز أولر (Euler) χ للسطوح فالجنس هنا هو $\frac{1}{2}(2-\chi)$، وهكذا فمميّز أولر هو أيضا صامد تام.

شكل جوردان Jordan العادي لمصفوفة

نقدّم هذا المثال للذين يتذكرون شكل جوردان العادي لمصفوفة. أما الآخرون فيمكنهم القفز على هذا المثال لأن شكل جوردان العادي لمصفوفة موضوع طويل وتقني بحيث لا يتسع المجال لتفصيله في هذا المقام. لنعتبر تطبيقا خطيا $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. إنه يُمثَّل في الأساس القانوني بـ $n\times n-$ مصفوفة A. الآن إذا تحوّلنا إلى أساس جديد فالمصفوفة A تتغيّر إلى المصفوفة $B=PAP^{-1}$، حيث P هي مصفوفة الانتقال من الأساس القانوني نحو الأساس الجديد.

علاقة التكافؤ الطبيعية بين المصفوفات هي التشابه. تكون مصفوفتان A و B متشابهتان إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب P بحيث $B=PAP^{-1}$. وهذا يعني أن هاتين المصفوفتين تمثلان نفس التطبيق الخطي في أساسين مختلفين.

الصامد التام بالنسبة لعلاقة التشابه هو شكل جوردان العادي لمصفوفة. تكون مصفوفتان متشابهتين إذا وفقط إذا امتلكتا نفس شكل جوردان العادي بتقدير تبديل لكتل جوردان. تجدر الإشارة هنا إلى أن الصامد التام هو مجرد عنصر متميز من صف التكافؤ.

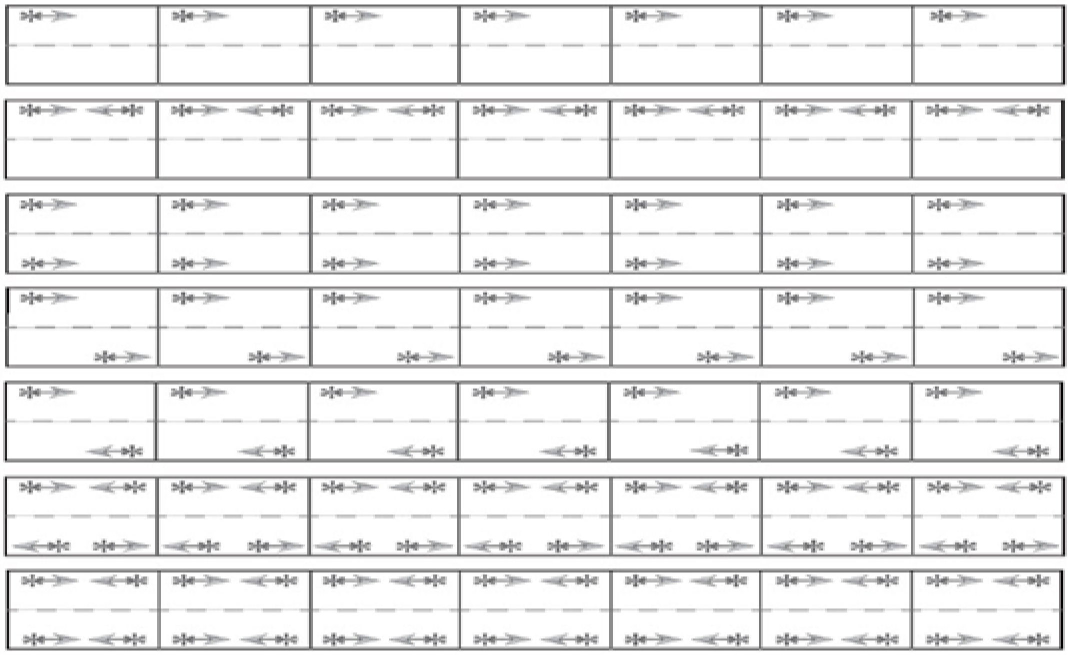
إشارة تبديلة

نعتبر تبديلات n عنصرا ثم نقوم بتصنيفها حسب زوجية أو فردية هذه التبديلات.

المناقلة : هي تبديلة لعنصرين من المجموعة. كل تبديلة تمثل تركيبا لعدد منته من المناقلات. نلاحظ أن اختيار المناقلات في هذا التركيب ليس وحيدا، لكن شفعية عدد المناقلات المستعملة في التركيب هي ثابتة لا تتغير، مما يسمح بتعريف التبديلة الفردية والتبديلة الزوجية دون غموض.

تكون تبديلتان متكافئتين إذا وفقط إذا كانت ثانيتهما تركيبا للأولى مع تبديلة زوجية. إن شفعية تبديلة صامدة بالنسبة لعلاقة التكافؤ هذه.

تصنيف الأفاريز



الشكل 7 : الأنماط السبعة للأفاريز

الإفريز هو شريط غير منته مزيّن بنمط متكرر بشكل دوري كما في الشكل 7. نسمي تناظر إفريز كل تحويل هندسي يحوّل إفريزا إلى آخر : نقول إن الإفريز صامد بهذا التحويل. كل الأفاريز صامدة بعدد غير منته من التحويلات، كل منها تركيب لانسحاب أصغري T_L ذي طول L، أو لمقلوبه T_L^{-1}. انظر الشكل 7. هذه الانسحابات هي التناظرات الوحيدة للإفريز الأول، في حين أن للأفاريز الأخرى تناظرات إضافية. على سبيل المثال، فإن الإفريز الثاني متناظر بالانعكاسات الشاقولية، والثالث متناظر بالانعكاس الأفقي بالنسبة إلى المستقيم الذي ينصف الإفريز.

يكون إفريزان متكافئين إذا كان لهما نفس زمرة التناظرات. إنها مبرهنة عميقة تنصّ على أنه توجد بالضبط 7 صفوف تكافؤ، وهي ممثلة في الشكل 7. وبدل وضع كل تناظرات إفريز في قائمة، من الأجمل أن نضع قائمة بمولدات هذه التناظرات : إذ يوجد عدد منته من المولدات، وكل التناظرات يمكن الحصول عليها بتركيب عدد منته من المولدات أو من مقلوباتها. إليك قوائم مولدات الصفوف السبعة :

1. $\{T_L\}$؛

2. $\{T_L, r_v\}$ حيث r_v هو التناظر المحوري بالنسبة للمحور العمودي؛

3. $\{T_L, r_h\}$ حيث r_h هو التناظر المحوري بالنسبة للمحور الأفقي؛

4. $\{T_L, g_s\}$ حيث g_s هو التناظر الإنزلاقي، وهو التركيب $T_{L/2} \circ r_h$؛

$\{T_L, r_h \circ r_v\}$ حيث $r_h \circ r_v$ هو الدوران ذو الزاوية π؛

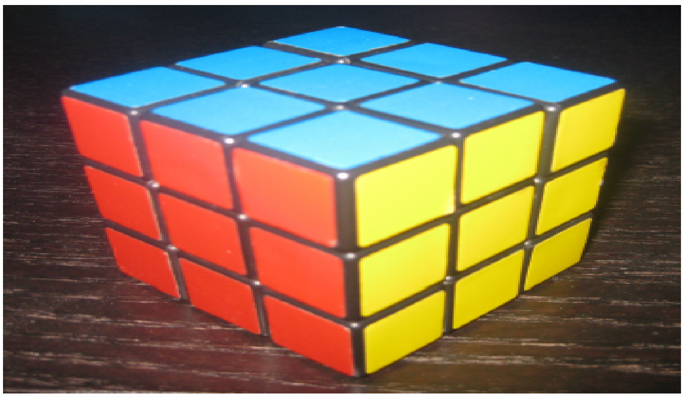
5. $\{T_L, g_s, r_h \circ r_v\}$؛

6. $\{T_L, r_h, r_v\}$.

نلاحظ أن نفس النمط من التصنيف يمكن استخدامه في تبليط السطوح. فتبليط سطح هو صامد بالنسبة لانسحابين في منحيين ليسا على استقامة واحدة. هناك 17 صف تكافؤ تسمى الزمر البلورية بسبب تطبيقاتها في علم البلوريات. يمكن طرح نفس المشكل في الحالة الثلاثية الأبعاد مع أنماط صامدة متكررة بالنسبة لثلاثة انسحابات في ثلاثة مَنَاحٍ مستقلة خطيًا : في هذه الحالة، يوجد 230 صنف تكافؤ. إن لهذه التصنيفات تطبيقات مهمة في علم البلوريات. في الغالب، فإن المواد الكيميائية المنتسبة لنفس صف التكافؤ تتقاسم خواص كيميائية مشتركة.

مكعب روبيك

توفّر الرياضيات خوارزميات لحل لغز مكعب روبيك (الشكل 8).



الشكل 8 : مكعب روبيك.

إذا كان مكعب روبيك مثبتا في الفضاء فإنه توجد 12 حركة أولية يمكن القيام بها وكلها من الشكل : دوران ربع دورة لوجه، وجه أمامي، وجه خلفي، وجه علوي، وجه سفلي، وجه أيسر، وجه أيمن. وبما أن الوجوه ستة وللدوران اتجاهان مختلفان فهذا يُظهر 12 حركة.

الآن أنت قلق، فقد فكك صديقك المكعب وأصبحت أجزاؤه كلها مبعثرة ومختلطة. لقد اتفقتما على حل لغز المكعب، لكنكما تحاولان التصويب منذ ساعات ولم تنجحا في جعل كل الوجوه بلون واحد. من الممكن أنكما جمّعتما المكعب بطريقة خاطئة؟

يقودنا ذلك إلى إدخال علاقة تكافؤ على وضعيات مكعب روبيك؛ نقصد بالوضعية هنا أية طريقة لجمع أجزاء المكعب. تكون وضعيتان متكافئتين إذا وفقط إذا أمكن تحويل إحداهما إلى الأخرى بحركات أولية متتالية.

ومن ثمّ يتضح وجود صامد تام لعلاقة التكافؤ هذه. وهكذا أنت تعلم الآن كيف تجيب عن أسئلتك؟ يكفي أن تتحقق مما إن كانت للوضعية الحالية للمكعب نفس الصامد التام مع وضعية المكعب عندما تكون لكل الوجوه نفس اللون. توجد بالضبط وضعية واحدة (من بين 12 وضعية) تسمح بذلك. إذن فأنت أمام 11 فرصة من 12 تكون فيها طريقة تجميع المكعب خاطئة.

إن صفة الصمود هنا تقنية نسبيا. نلاحظ أن الحركات الأولية تحدث تبديلة في الأجزاء الزوايّة وأخرى في أجزاء الأحرف للمكعب. يجب أن تتوفّر علاقة معينة تربط جيدا هاتين التبديلتين حتى نصل إلى الوضعية المنشودة.

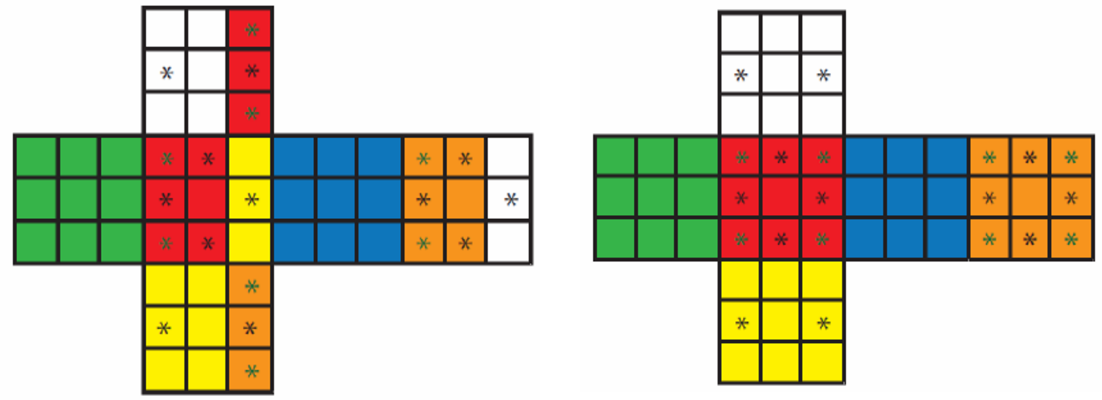
لنصنف الآن "الصامد". يمكنك أن تُقرر تجاوز هذا الأمر والذهاب مباشرة إلى الخلاصة.

يتكوّن مكعب روبيك من 8 مكعبات صغيرة في الزوايا و 12 مكعبات في وسط أحرفه. تعطى كل وضعية كما يلي:

- تبديلة σ للأجزاء الزوايا.
- تبديلة τ لأجزاء الأحرف.
- دوران بـ $0°$، $120°$ أو $240°$ في كل زاوية، يمكن أن يوصف بكونه تركيبا من 0 دوران أو 1 أو دورانيْن بـ $120°$ درجة.
- دوران بـ $0°$ درجة أو $180°$ درجة عند كل حرف، يمكن أن يوصف بكونه تركيبا من 0 أو 1 دوران ذي $180°$ درجة.

الجزء الأول من وصف الصامد هو الفرق بين إشارة σ وإشارة τ، بترديد 2، ونسميه d.

كيف نقيس دوران الزوايا أو الأحرف؟ يمكن القيام بهذا دون إتباع قاعدة معينة. في المكعب الأولي نؤشر على وجه خارجي واحد لكل زاوية (من بين ثلاثة وجوه) وعلى وجه واحد لكل حرف (من بين حرفين) كما نرى مثلا في الشكل 9– (أ).



(ب) (أ)

الشكل 9 : زوايا مكعب روبيك مُؤشَر عليها بنجوم خضراء داكنة، والأحرف مُؤشَر عليها بنجوم سوداء. في (ب)، نرى وضعية أخرى بعدما قمنا بدوران واحد للوجه الأزرق.

نريد أن نحسب "الصامد" في وضعية أخرى (مثلا وضعية الشكل 9-(ب)). عندما نحرك المكعب يمكن أن يكون الوجه المؤشر عليه لزاوية من الزوايا في موقع الوجه المؤشر عليه في مكعب روبيك المناسب للحل. نحسب عدد الدورانات ذات °120 حول محور موجّه من الزاوية نحو مركز المكعب حتى نأخذه إلى المكان الملائم.

نقوم بهذا لكل الزوايا ونأخذ مجموع أعداد الدورانات. أما الجزء الثاني من "الصامد" فهو هذا المجموع، مخفَض بترديد 3، الذي نسميه C_0. في الشكل 9-(ب)، نحتاج -باعتبار زاويتين- دورانا واحدا؛ ومن أجل زاويتين أخريين نحتاج إلى القيام بدورانيْن، في حين لا نحرك الزوايا الأربع الأخرى. يضاف إلى المجموع 6. نلاحظ أن $C_0 = 0$ في الشكل 9-(ب).

ونقوم بنفس العمل بالنسبة للأحرف. نحسب عدد الدورانات ذات °180 حول محور موجّه نحو مركز المكعب من أجل بلوغ المكان المناسب.

نفعل هذا لكل الأحرف، ونجمع أعداد الدورانات. نصل بذلك إلى الجزء الثالث من "الصامد" إنه هذا المجموع، مخفض بترديد 3، الذي نسميه S_i. في الشكل 9-(ب)، لا حاجة لدورانات الأحرف، ومن ثمّ فإن $S_i = 0$.

فالصامد إذن هو الثلاثية (d, C_0, S_i). قد تجادلنا بالقول إن عدد الدورانات الذي حسبناه لكل زاوية (أو حرف) عدد لم يخضع لأية قاعدة منطقية : إذ يعتمد على خيارنا للوجه الذي أشّرنا عليه في البداية. أنت على حق! لكن لاحظ أن الذي اعتبرناه هو **مجموع** هذه الأعداد **لكل** الزوايا. يمكنك أن تختبر ذلك بتغيير الوجه المؤشّر عليه في البداية ثم تحقق أن المجموع يبقى نفسه!

من السهل التحقق من أن الصامد، من أجل كل وضعية مناسبة لمكعب روبيك، هــو $(0,0,0)$. ومنه يتضح أن الثلاثية (d, C_0, S_i) صامد تام. هذا يعني بوجه خاص أنه انطلاقا من وضعية ابتدائيــة للمكعب، من الممكن أن نحل لغز المكعب إذا وفقط إذا كان الصامد هو $(0,0,0)$.

وبناءً على ذلك : كيف تجمّع المكعب بعد تجزئته؟ يمكنك وضع أول سبع زوايـا عــشوائيا. عندما تضع الثامنة تأكد من اختيار توجيهها بحيث $C_0 = 0$ (هناك فرصة واحدة من بين ثلاث). ثــم، تبدأ بوضع الكعيبات الحرفية الإثني عشرة. تستطيع وضع العشرة الأولى عشوائيا. عندما تُقْدم علـى الوضع الحادي عشرة يجب عليك اختيار وجه الكعيبة الحرفية المناسب من بين الاثنتــين المتبقيتــين بحيث يكون $d = 0$ (هناك اختيار واحد من بين اثنين). وبذلك تبقي لديك كعيبة حرفية واحدة للوضعية الثانية عشر. تأكد بأنك اخترت اتجاهها بحيث يكون $S_i = 0$ (هناك اختيار واحد من بين اثنين).

خلاصة

تصنيف الكائنات مسألة أساسية في الرياضيات وفي العلوم بصفة عامة. والصوامد أدوات قوية في هذه المسائل. لقد وضحنا ذلك من خلال عدة أمثلة متنوعة. من الراجح أنك ستصادف أكثــر ممــا قدمناه أثناء استكشافاتك في مجال الرياضيات، ويمكنك الشروع في بناء مجموعتك المفضلة الخاصة.

تقاسم هذا على:

- Email
- **طباعة**
- Facebook
- Twitter

هذا المقال متوفر أيضا بـــ: الانجليزية.

أرسل الموضوع على شكل PDF أدخل عنوان البريد الإلكتروني ابعث

اترك تعقيبًا

بريدك الإلكتروني لن ينشر. الحقول المطلوبة مسجلة *

الاسم *

البريد الالكتروني *

الموقع الإلكترني

التعقيب

You may use these HTML tags and attributes: <a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>

أرسل التعقيب

أشعروني بجديد التعقيبات على البريد الإلكتروني.

أشعروني بالمقالات الجديدة عبر البريد الإلكتروني.