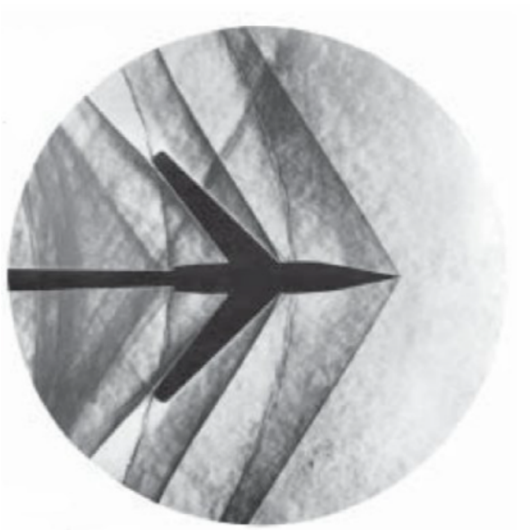
سلوك صدمات الموائع خلال الحركة

بقلم: ديفيد مومفورد David Mumford **وكريستيان روسو** Christiane Rousseau
ترجمة : أمينة أودغيري ونسمة زبيري

مقدمة

هذه المقالة القصيرة هي أكثر صعوبة من غيرها، لكنها تشرح في صفحات قليلة، وبعبارات بسيطة إحدى أصعب المشاكل المفتوحة في بداية القرن الحادي والعشرين. المقالة تحتوي على مواد ثرية، وصيغت بحيث يمكن قراءتها أو تجاوز بعضها. تردّد المشرفون على مشروع كلاين، لفترة من الزمن، في إرسال هذه المقالة للنشر، لكن بعد تجريبها مع المدرسين خلال ورشتي عمل كلاين وجدوا أنها تسمح لهم بتحدي مقالات أصعب منها فقرّروا نشرها على الموقع. وهم متحمسون لسماع تعليقاتكم ومعرفة ما إذا اهتم أحدكم بهذا الموضوع.



الشكل (1) : موجة الصدمة التي تسببها طائرة سرعتها تفوق سرعة الصوت

لا شك أنكم قد سمعتم بطائرات تخترق حاجز الصوت، ماذا يعني ذلك؟ هذا يعني أن صدمة الموجة في الجو تكون مثلما هي موضحة في الشكل (1). ولكن ما هي صدمة الموجة؟ تصوَّر أن حركة مرور كثيفة على طريق سريع بمثابة موجة. تمثل موجة الصدمة الاصطدامات. لتوضيح ذلك علينا تطوير حدسنا في النموذج الأحادي البعد: التحرك في طريق واحد بسرعات مختلفة. تعلم أن التصادم يمكن أن يحدث عند عدم تحكم السائقين في السرعة. الهواء هنا عبارة عن مائع. هناك جائزة تقدّر بمليون دولار لمن يتمكن من الإجابة عن التساؤل التالي: تحت أية شروط تظهر في المائع أمواجُ الصدمة أو أيةُ عوامل متفردة (شاذة) أخرى؟ هذا ما سنقوم بشرحه فيما يلي.

1. النماذج الأحادية البعد

معادلات بارگرس Burgers

لنقم الآن بإنشاء نموذج بسيط لحركة المرور. لدينا سيارات في كل موقع x على طول خط يمثل الطريق. عند اللحظة $t=0$ فالسيارة الموجودة في الموضع x_0 لديها سرعة $V_0(x_0)$، والسيارة المنطلقة من x_0 ستكون في الموضع $x(t,x_0)$ في اللحظة t. لنرمز بـــ $V(x(t,x_0),t)$ لسرعة السيارة

في الموقع $x(t,x_0)$ واللحظة t. لنفرض أن السيارة تتحرك بسرعة ثابتة على مسار مستقيم. عندئذ يكون : $V(x(t,x_0),t)= V_0(x_0)$. وذلك يعني أن هذه الدالة ثابتة بالنسبة إلى t. ولذا فمشتقاتها معدومة. ومن ثمّ، نتحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t,x_0),t) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t,x_0),t)\frac{\partial x}{\partial t}(t,x_0)+\frac{\partial V}{\partial t}(x(t,x_0),t)\\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t,x_0),t)V_0(x_0)+\frac{\partial V}{\partial t}(x(t,x_0),t).\end{aligned}$$

نمثل الآن الموقع على الطريق بالمتغير x. بوضع $V(x(t,x_0),t)= V_0(x_0)$ تصبح معادلة حركة المرور:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\times V=0 \qquad (1)$$

وتسمّى بمعادلة بارگرس Burgers.

تنصّ هذه المعادلة على أن كل سيارة تحافظ على سرعة ثابتة على طول الطريق.

هناك طريقة أخرى للتعبير عن ذلك، وهو القول إنه عندما تنطلق سيارة من موضع x_0 بسرعة $V_0=V(x_0,0)$ فإنها تصبح في الموضع x_0+tV_0 عند اللحظة t، وبما أن السرعة ثابتة فإن: $V_0=V(x_0+tV_0,t)$ من أجل كل t.

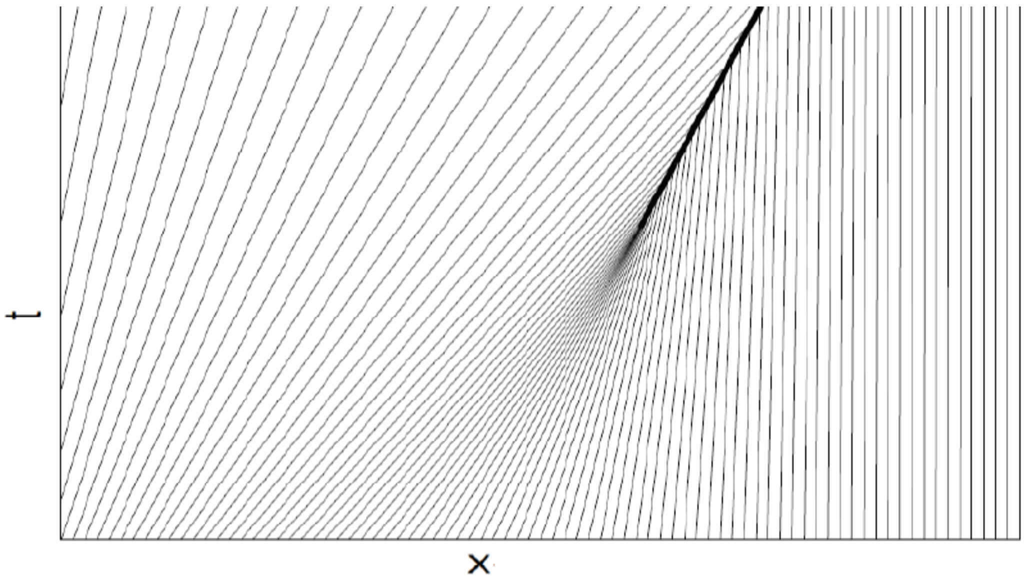
بطبيعة الحال، هذه ليست فكرة ذات شأن، فالتصادمات ستحدث. الشكل (2) يوضح لنا إحدى نتائج التصادم.

وصف الصدمات

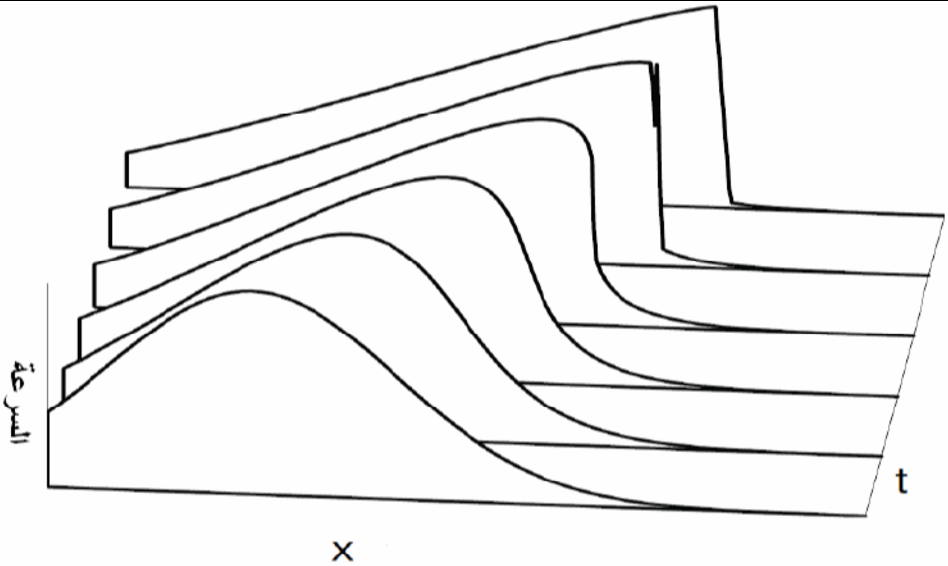
ماذا يحدث عندما نقترب من الصدمة؟ لنفرض في البداية (أي عند $t=0$) أن نقطتين x_0 و y_0 (حيث $x_0<y_0$) لديهما سرعتان $V(x_0,0)$ و $V(y_0,0)$ (حيث $V(x_0,0)>V(y_0,0)$). لنرمز للموضع x_0 عند اللّحظة t بـــ x_t، وبـــ y_t لموضع y_0 عند اللّحظة t. عندئذ تقترب x_t أكثر فأكثر من y_t، ومباشرة قبل الصدمة يكون x_t قريباً جداً من y_t، والفرق بين سرعتيهما

$$V(x_t,t)-V(y_t,t)=V(x_0,0)-V(y_0,0)$$

يظل نفسه. هذا يعني أن متوسط ميل الدالة $V(x,t)$ بالنسبة للمتغير x، بتثبيت t، يصبح كبيرا جدّاً (أنظر الشكل (3) الذي يعرض بيان $V(x,t)$ كدالة للمتغير x باعتبار قيم مختلفة لـــ t). هنا، نلاحظ أن $\frac{\partial V}{\partial x}$ يصبح غير منته عندما نقترب من الصدمة. وبالتالي فإن للمعادلة التفاضلية (1) تفردا (شذوذا) عند الصدمة.



الشكل (2) : موجة الصدمة في معادلة باركَرس باعتبار سرعة ابتدائية معطاة بـــ: $V(x) = e^{-x^2}$.
"الخطوط العالمية" world lines [أي المسارات باعتبار الزمن والمكان في آن واحد] للسيارات التي كانت في اللحظة الإبتدائية بعيدة عن بعضها البعض بنفس المسافة.
الخط الأسود السميك هو مكان حدوث الاصدامات.



الشكل (3) : في نفس وضعية الشكل (2)، نبيّن منحنى السرعة كدالة للفضاء باعتبار ستة أزمنة.
لاحظ كيف أن السرعة تصبح متقطعة عند حدوث موجة الصدمة:
ميل السرعة يصبح لانهائيا عند تثبيت x، وأيضا عند تثبيت t.

2. نمذجة الصدمات الحقيقية أم نمذجة كيفية تجنبها؟

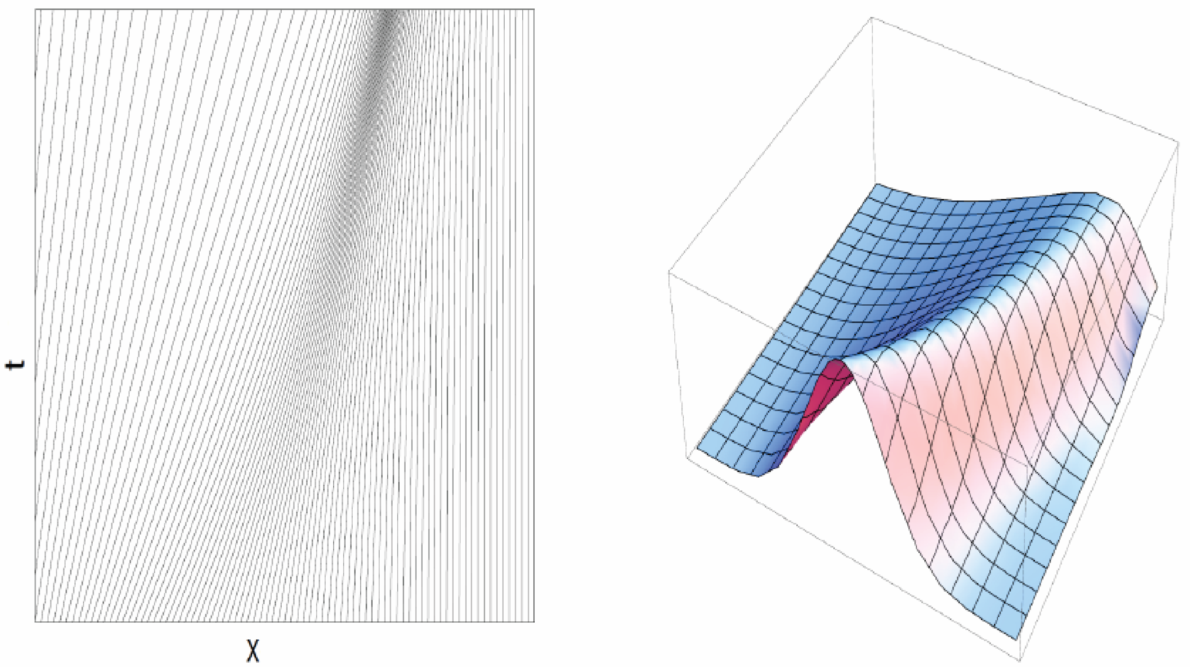
لقد نمذجنا حالة السيارات التي تسير على طول الطريق ولا تغيّر أبدًا سُرَعَها. إذا كانت الدالة $V(x)$ متزايدة مع ازدياد x، فحينئذ تكون السيارات الموجودة في المقدمة أسرع من تلك الموجودة في المؤخرة، ولا توجد أية مشكلة. لكن إذا كانت بعض السيارات الأبطأ أمام السيارات الأسرع، سيحدث حينها تصادم إذا لم تغيّر أيٌّ منها سرعتها. هناك طريقتان لتطوير النموذج إلى حد أبعد. دعنا نعود إلى الوضعية التي تهمّنا، وهي موجة الصدمة في حال اختراق سرعة الصوت. بإمكاننا إدخال تعديلات على معادلتنا تراعي التصادمات. لنعتبر حالة البعد الواحد للصدمات، علما أن الوضع الخاص بالطائرات التي تفوق سرعتها سرعة الصوت شبيه جدا بهذه الحالة. فبصفة خاصة، نجد أن الهواء أمام الطائرة ليس سريع التحرك حتى يتمكن من تفادي إدراك الطائرة له القادمة من الخلف! كما يمكننا تحسين معادلتنا للسماح لمزيد من السلوك الذكي للسائقين بالعمل على تنزيل سرعة السيارات السريعة وزيادة سرعة السيارات البطيئة.

سائقون أكثر ذكاء

عندما يصبح التصادم وشيكًا، فإن سلوك السائق الواعي يكون حتما متأثرا بجيرانه محاولاً جعل سرعته تتماشى مع سُرع السيارات المجاورة. إنه يقع أمر شبيه مع الموائع اللزجة : إن كنت قد شاهدت عسلا متدفقا، فربما لاحظت أنه يسلك سلوكا كأنه كتلة واحدة، كما لو كانت كل أجزائه مرتبطة ببعضها البعض: لا توجد قطرات حول السائل، إنها تظل مرتبطة بالتيار الرئيسي. مقارنة بالعسل، الماء لديه لزوجة أقلّ بـــنحو 10 آلاف مرة، والهواء 50 مرة أقل منه –ولكنها لزوجة غير معدومة. وعليه فإن أحد تعديلات معادلة بارگرس التي تتفادى الاصطدامات، عندما تكون الدالة الابتدائية للسرعة V_0 محدودة، ستتشمل إضافة حد يعبّر عن اللزوجة. نلاحظ أن حد اللزوجة هذا هو مضاعف للمشتق الثاني $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. ومن ثمّ، فالمعادلة تأخذ الشكل الذي يعرف بمعادلة بارگرس اللّزجة:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\cdot V=\upsilon\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad (2)$$

مع $\upsilon>0$ حيث يطلق على υ اسم اللزوجة (أو عامل اللزوجة). يمكن رؤية "الخطوط العالمية" المعدلة في الشكل (4) باعتبار الدالة $V(x)$ التي تصف السرعة الابتدائية كما في الشكل (2).



الشكل (4) : نضيف إلى حالة الشكل (2) بعض اللزوجة. لاحظ كيف أن السيارات تكون متجمّعة ولكنها لا تصطدم بعد الآن. على اليمين، نلاحظ بيان الدالة $V(x,t)$.

لماذا المشتق الثاني؟ نذكر أن المشتق الثاني هو نهاية:

$$\frac{V(x+\delta x,t)-2V(x,t)+V(x-\delta x,t)}{\delta x^2}. \qquad (3)$$

بإمكاننا ملاحظة ذلك لأن مشتق المشتق الأول سيكون قريبا من

$$\frac{V'(x+\delta x/2,t)-V'(x-\delta x/2,t)}{\delta x}\approx\frac{1}{\delta x}\left(\frac{V(x+\delta x,t)-V(x,t)}{\delta x}-\frac{V(x,t)-V(x-\delta x,t)}{\delta x}\right)$$

لنُعِد كتابة العبارة الأخيرة كما يلي

$$\frac{2}{(\delta x)^2}\times\frac{\left(V(x+\delta x,t)-V(x,t)\right)+\left(V(x-\delta x,t)-V(x,t)\right)}{2}$$

ماذا يمثل العامل الثاني في الجداء السابق؟ إنه يمثل متوسط حدّين: الأول هو الفرق بين السرعة في الأمام $V(x+\delta x,t)$ والسرعة في الوسط $V(x,t)$، أما الحد الثاني فيمثل الفرق بين السرعة في الخلف $V(x-\delta x,t)$ والسرعة في الوسط $V(x,t)$.

يظهر خطر التصادم حينما يكون $V(x-\delta x,t)>V(x,t)>V(x+\delta x,t)$. في هذه الحالة، يكون الحد الأول سالبا والحد الثاني موجبا. عندما يتغلب الحد الأول، هذا يعني أن المتوسط يكون سالبا. عندئذ تُخْبرنا العبارة (3) بضرورة تنزيل السرعة لأن الطرف الأيسر في (2) يمثل التسارع. أما إن تغلب الحد الثاني فهذا يعني أن المتوسط موجب وأن عليك الإسراع.

نلاحظ أنه مباشرة قبيل حدوث التصادم، سيكون هناك تقطع في السرعة للسيارة الأسرع التي تُوشِك على الاصطدام بسيارة بطيئة.

زيادة اللزوجة تزيل التصادمات في معادلة بارگرس!

يمكننا الآن التحدث عن جوائز المليون دولار.

نشير إلى أنه بتثبيت x_0، فالطرف الأيسر في (2) يمثل التسارع، لأنه يساوي مشتق الدالة $V(x(t,x_0),t)$ بالنسبة إلى t. إذن، المعادلة اللزجة المعدّلة تقول إنّه إذا كانت السيارة الوسطى ذات سرعة أصغر من متوسط سرعة السيارات المجاورة سواء تلك الموجودة في الأمام أو في الخلف فإن هذه السيارة تتسارع. والعكس هو الصحيح إذا كانت أسرع.

3. تحديات نمذجة التدفقات الحقيقية في العالم

بعد نمذجة التدفقات الحقيقية في العالم

لقد كنّا تعمّدنا تفادي التعقيدات لطرح جانب الرياضيات بشكل أكثر وضوحا مما هو عليه الحال في الواقع. وفي هذا السياق أهملنا بوجه خاص كثافة السيارات في الطريق. من أفضل نماذج حركة المرور نذكر نموذج لايتهيل–وايثم–ريتشارد Lighthill-Whitham-Richards المرتبط بمتوسط الكثافة المحلية $D(x,t)$ وأيضا بمتوسط السرعة المحلية $V(x,t)$. لكن معادلة بارگرس لا زالت تهيمن على هذه النماذج الدقيقة. وعليه كان حديثنا يركز على الأساسيات.

إن حركة الهواء حول الطائرة، خصوصاً حول جناحيها، وحركة الماء حول السفينة هي تطبيقات حقيقية ذات أهمية بالغة. يعمل الرياضيون على نمذجة هذه الظاهرة منذ عهد أولر Euler (القرن الثامن عشر للميلاد). هناك اختلاف أساسي بين الهواء والماء، لأن الماء غير قابل للانضغاط تقريباً على عكس حال الهواء الذي ينضغط بقوةٍ. على سبيل المثال، تُستَعمل خاصية عدم قابلية انضغاط الزيت لتحويل القوى الكبيرة في الآلات، كالجرّافات والحفّارات. تخص جائزة المليون دولار حالة عدم قابلية الانضغاط في الأبعاد الثلاثة.

جائزة المليون دولار

من أجل احتفال الرياضيين بالألفية الجديدة، أنشأ لندن كلاي Landon T Clay سبع جوائز لحل سبع مسائل. كانت الجوائز قد صممت لتسجيل بعض أصعب المسائل التي تنافس حولها الرياضيون في نهاية الألفية الثانية، وكذا لتوعية الرأي العام وجعله يدرك بأن الآفاق في الرياضيات لا تزال مفتوحة وتزخر بالمسائل غير المحلولة. ستُمنح جائزة المليون دولار لحل كل مسألة من المسائل السبع – علما أن إحداها (وهي مُخَمَّنة بوانكريه Poincaré) قد تم حلُّها!

جائزة المليون دولار التي تهمنا هي خاصة بالمعادلات التي تتحكم في تدفق مائع لزج غير قابل للانضغاط في الفضاء الثلاثي الأبعاد: تسمّى هذه المعادلات بمعادلات نافييه–ستوكس Navier-Stokes. وقد سميت كذلك بعد أن عمل كلود–لويس نافييه Claude-Louis Navier (1785–1836) وجورج غابرييل ستوكس George Gabriel Stokes (1819–1903) وبحَثَا في حركة الموائع. وباستثناء عامل عدم قابلية الانضغاط الذي سنشرحه لاحقاً، فإن تلك المعادلات تمثل الصيغة الثلاثية الأبعاد لمعادلة بارگرس اللَّزجة.

ما هي الأصالة في هذا الموضوع؟ لقد خمَّن معظم الرياضيين أن هذه المعادلات المسماة معادلات نافييه–ستوكس، لا تعبّر أبدًا عن الصدمات أو عن أية تفرّدات أخرى، مثل الاضطرابات الناجمة عن الدوامات من جميع الأحجام، من الكبيرة إلى اللامتناهية الصغر. ولهذا فالمعادلات ينبغي أن تكون قابلةً للحل مهما كانت المدة الزمنية. وإذا أُثبتَ ذلك، فهذا جميل! ولكن في العلوم، لا يمكننا الوثوق في النتائج ما لم يتم إثباتها. وبالتالي، إذا استطعت إظهار مثال عن الشروط الابتدائية نجمت عنها صدمة أو تفرد آخر في مدة محددة، فهذا سيكون فعلا جميلا من طرفك.

لماذا لا يؤمن الرياضيون بعدم وجود صدمة أو تفرد آخر سيظهر من خلال معادلة نافييه ستوكس؟ ذلك ما أَثبتته منذ عقود بالنسبة للتدفقات الثنائية الأبعاد امرأة روسية، تدعى أولغا لاديزنسكايا Olga Ladyzhenskaya. ومنذ ذلك الحين، فالمحاكاة العددية للحلول لم تُظهر أية تفردات في الحالة الثلاثية الأبعاد. إن محاكاة حلول المعادلات التفاضلية الجزئية، مثل هذه المعادلات، تشكل تحدياً حسابياً كبيراً يتطلب خوارزميات وبرامج متطوّرة تعمل لفترات طويلة على أجهزة حواسيب فائقة القوة.

هل هذا يتناقض مع موجة الصدمة في الشكل (1)؟ لا! الهواء قابل للانضغاط وجائزة المليون دولار تخصّ التدفقات غير القابلة للانضغاط.

ما تبقّى من هذه المقالة القصيرة هو للاستزادة في اتجاهين. الاتجاه الأول : سنشرح كيفية قبول الحلول المتفردة (الشاذة) لمعادلة بارگرس. (انظر العنوان الفرعي 5). إذا كنت لا زلت تتذكر درسك في حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، فباستطاعتك قراءة كيفية تعديل معادلة بارگرس لنمذجة حركات الموائع غير القابلة للانضغاط في الفضاء الثلاثي الأبعاد (انظر العنوان الفرعي 6).

4. الخاتمة

ماذا تعلّمنا؟ عدّة أشياء. على سبيل المثال، ربما تصورت أن نمذجة المائع جدٌّ معقدة لدرجة أنك لن تستطيع فهمها. والآن، لقد أدركت أن الأمر يعتمد على نفس المبادئ الأساسية للميكانيك التي ربما تطرقت إليها عند دراسة القوى، وقوانين نيوتن، وحفظ الطاقة. كما أدركت أن الأدوات التي

تعبّر عن هذه القوانين الفيزيائية تشمل ببساطة المفاهيم المقدمة في درس حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات. أما شكل المعادلات التي تحكم حركة المائع فهي بسيطة جداً. ورغم ذلك تظل هناك العديد من الأسئلة المفتوحة حول حلولها، حتى ولو تمت دراستها بشكل مكثف من الناحيتين النظرية والتطبيقية لمدة تزيد عن قرنين.

إذا كنت قد اطلعت على نمذجة الصدمات، فقد أدركت جانبا بارزا من عمل الباحثين في الرياضيات : عندما تكون حلول مسألة غير موجودة، فإن الرياضي باستطاعته إنشاء كائن يعبّر عن الحل. أنت معتاد على التعامل مع مجموعة الأعداد العقدية وطريقة إنشائها، وذلك بإضافة جذور أي كثير حدود بمعاملات حقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. أما هنا، فقام الرياضيون بابتكار "التوزيعات" distributions، ممّا يسمح بأن تكون للمعادلات التفاضلية الجزئية حلول ضعيفة.

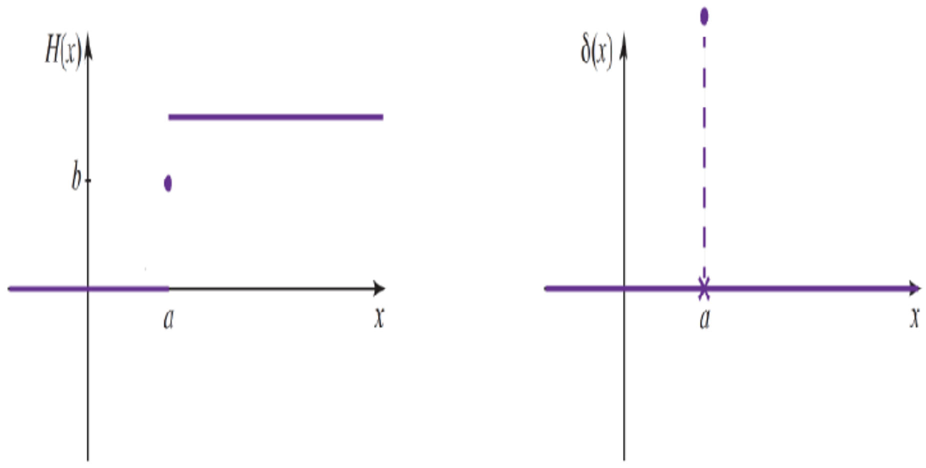
لكن ذلك لم يكن كافياً لتسوية جائزة المليون دولار المذكورة أعلاه. دعونا نقتبس وصف شارل فيفرمان Charles L. Fefferman للجائزة على موقع كلاي Clay الإلكتروني، فهو يقول : "... إنّ فهْمَنا في مستوى بدائي جدّاً. الطرق المألوفة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية تظهر غير مؤهلة لتسوية هذا المشكل. وبدل ذلك، قد نحتاج إلى بعض التعمق وإلى أفكار جديدة." لعل أحد طلبتك سيتمكن ذات يوم من اختراق هذا الحاجز...

5. استزادة 1

– العودة إلى معادلة بارگرس : قبول حلول متفردة (شاذة)

لكن الصدمات موجودة فعلا من الناحية العملية! كرجال علم، لا يمكننا توقيف تحاليلنا عند هذا الحد. فـــ"التفرد" ظاهرة جدّ ثرية والرياضيون ليس لديهم خيار سوى وضع نظاراتهم الرياضية والتفكير مليًا في هذا السلوك في سياق المعادلة. هذه المقاربة مدعوّة لتقديم حلول معممة أو 'ضعيفة'، وهي ليست مرنة. في حالة السيارات، إذا سارت بسرعات مختلفة فإنها تتصادم. المطلوب النظر إلى هذا الوضع كحشد ضخم من السيارات المسرعة يتزايد عددها من الناحية اليسرى مع وجود حشد آخر يتحرك بسرعة كافية للإصطدام بالمزيد من السيارات من الناحية اليمنى. وبالتالي نريد السماح للسرعة $V(x,t)$ أن تكون متقطعة عند x، وأن تكون لها نهاية من اليسار وأخرى من اليمين.

لكن هذه المعادلة تستعمل مشتقات V. وللتعامل مع كل ذلك، نحتاج إلى فكرة تعود بنا إلى القرن التاسع عشر وإدخال نوع من الخيال العلمي في دالة تدعى دالة دالتا [ديراك Dirac].



الشكل(5): دالة هيفسايد Heaviside **والدالة دالتا** δ

لنقدم لمحة عن دالات δ.

دعنا نُعرّف دالة هيفسايد بتمثيلها البياني المقدم في الشكل (5)، وبالعبارة التالية:

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ b, & x=a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

مشتق هذه الدالة هو دالة دالتا عند النقطة a. لاحظ أنّ هذا المشتق يعطى بـــ :

$$H'(x)=\delta(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ +\infty, & x=a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$$

وبالتالي فهو ليست دالة بالمفهوم العام، بل هو "دالة معمّمة ". الآن، إذا بقيت النظرية الأساسية صحيحة، يجب أن يكون لدينا :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}H'(x)dx=H(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1-0=1\,.$$

ومن ثمّ، فدالة دالتا لانهائية بشكل يجعل تكاملها $\int_{\Re}\delta(x)dx$ يساوي 1، أي أن المساحة الواقعة تحت "منحنى" δ تساوي 1. هذه الحيلة استعملت كثيرًا من طرف الفيزيائيين خلال القرن التاسع عشر للميلاد وقدمت أجوبة صحيحة، ممّا حفز الرياضيين على البحث على سلامة هذا المنطق. وحصل ذلك في نهاية الأربعينيات من القرن الماضي على يدي لورونت شوارتز Laurent Schwartz، وقد سمي هذا "الوحش الجديد" بـــالتوزيعات كما أسلفنا.

لجعل الآلية تعمل بمنطق سليم، قال شوارتز بأن التوزيعات ليست بدوال $f(x)$ بقيم في النقاط x، ولكنها "كائنات" تحددها عوض ذلك قيمها المتوسطة، التي ترونها كتكامل لجداء توزيع في دالة

ترجيحية. المثال الواقعي المأخوذ من الحياة العملية يُعطَى بالصور المنتَجة عبر الكاميرات : بإمكانك قياس اصطدام الضوء بجهاز الاستشعار، ولكن جهاز الاستشعار له حجم معين... ولا يمكنك قياس اصطدام الضوء بنقطة لامتناهية الصغر.

العودة إلى موجة الصدمة، والإحالة إلى الشكل (2). علينا ترك V متقطعًا عبر خط مائل شديد الإنحدار في أعلى اليمين. تظل معادلة بارگرس قائمة إذا استعملتَ دالات دالتا وجعلتَ الصدمة بذاتها تنتقل بمتوسط سرعات السيارات المتصادمة من اليمين ومن اليسار. في الواقع، دعنا ننظر قرب النقطة (x,t) عند موضع الصدمات. ولنرمز بـــ s لسرعة موجة الصدمة بحيث تكون موجة الصدمة مماسة للمستقيم الذي معادلته $x = st + a$. يمكن كتابة هذه الأخيرة أيضا : $x - st = a$. ومن ثمّ فالمستقيمات المتوازية ستُعطَى بـــ $x - st = a'$ حيث $a' \in \mathbb{R}$. في نطاق سلم صغير، يمكننا أن نفترض بأن السرعة هي (تقريباً) ثابتة على كل جانب من الصدمة، وأنها تأخذ قيمة V_L على يسار الصدمة، وقيمة V_R على اليمين. لذلك نحن بحاجة إلى إثبات أن

$$s = \frac{V_L + V_R}{2}\,. \qquad (4)$$

لنقم بذلك : بما أن V ثابتة على كل جانب من الصدمة، فإنها ثابتة على طول المستقيمات $x - st = a'$ مع $a' \in \mathbb{R}$. وبالتالي، لا يتعلق $V(x,t)$ إلا بالقيمة $x - st$. إذا وضعنا $y = x - st$ فهذا يسمح بكتابة $V(x,t) = \tilde{V}(y)$ باعتبار دالة (وحيدة المتغير) $\tilde{V}$. (المنحنى البياني لهذه الدالة يمكن أن يبدو مثل المنحنيات الخلفية في الشكل (3)). ومنه تكتب الدالة $\tilde{V}$ على الشكل $cH(y) + d$، حيث H هي دالة هيفسايد في a، و $c = V_R - V_L$.

لاحظ أن $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{1}{2}V^2)}{\partial x}$، ممّا يسمح بكتابة معادلة بارگرس كالتالي :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{1}{2}V^2)}{\partial x} = 0\,. \qquad (5)$$

بما أن لـــ $\frac{1}{2}V^2$ قفزة تساوي

$$\frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2) = \frac{1}{2}(V_R - V_L)(V_R + V_L)$$

فإن الدالة $\frac{1}{2}\tilde{V}^2$ من الشكل $\frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2)H(y) + e$. وبالتالي :

$$\frac{d(\frac{1}{2}\tilde{V}^2)}{dy} = \frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2)\delta(y)\,.$$

ولما كان $\frac{1}{2}V^2(x,t) = \frac{1}{2}\tilde{V}^2(y)$ فقاعدة اشتقاق تركيب الدوال تؤدي إلى :

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}V^2)}{\partial x} = \frac{d(\frac{1}{2}\widetilde{V}^2)}{dy}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2)\delta(y)\,. \qquad (6)$$

وبالمثل، نجد :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{d\widetilde{V}}{dy}\frac{\partial y}{\partial t} = (-s)\frac{d\widetilde{V}}{dy} = -s(V_R - V_L)\delta(y)\,. \qquad (7)$$

بتعويض (6) و (7) في (5) نجد :

$$\left[\frac{1}{2}(V_R - V_L)(V_R + V_L) - s(V_R - V_L)\right]\delta(y) = 0$$

والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت (4) محققة.

6. استزادة 2

– نمذجة تدفق المائع في ثلاثة أبعاد

نريد نمذجة تدفق الماء، أو بشكل عام، تدفق أي سائل غير قابل للانضغاط. لقد قلنا سابقاً إن الماء يتحرك في كل نقطة $x \in \mathbb{R}^3$ بسرعة تعطَى بالشعاع $V(x,t)$. بالفعل، العناصر الثلاثة لـــ V هي ثلاث دوال مجهولة والتي نحن بحاجة إلى إيجادها. غير أننا سنحتاج حاليا إلى دالة رابعة : الضغط $p(x,t)$. الضغط هو تلك القوة التي تمكّن مُعدات تحريك التربة من القيام بعملها: المضخة تضغط على خزان الزيت (النفط) الذي يكون موصول بواسطة الخراطيم إلى المكابس المُحركة للدّلاء، والمجارف، إلخ. الضغط في المائع يأتي من القوة التي تمارس على عنصر منه من طرف العناصر المجاورة.

بشكل عام فإن السوائل، مثل الماء والزيت، تكون غير قابلة للانضغاط، بمعنى أن حجمهما لا يتغيّر عند الانضغاط بينما تقبل الغازات الانضغاط. الآن، حتى نُنمذج حركة المائع، نبدأ بنفس فكرة حركة المرور: افترض أن الماء يحاول الاحتفاظ بسرعته على مرّ الزمن، لكن اللّزوجة تؤثر في تلك السرعة عند كل نقطة لتتماشى مع سرعة العناصر المجاورة. يمكن التعبير عن كل هذا بالمعادلة (2) إذا ما ترجمنا مصطلحاتها شعاعياً.

بالنسبة لحد اللّزوجة فنحن بحاجة لطريق ثلاثي الأبعاد لإضافة حدّ المشتق الثاني. الآن، هذا الحد يُفْترض أن يخبرنا بتغيّر دالة معينة لتعبّر عن متوسط ما جاورها. على الطريق، لدينا جواران : أحدهما خلفنا والآخر أمامنا. في الحالة الثلاثية الأبعاد، يمكن التفكير في هذا المكعب الصغير المحيط بنقطة في الماء. لدينا ستة جوارات، الأول على اليسار، والثاني على اليمين، والثالث من الخلف، والرابع من الأمام، والخامس من الفوق، وأخيراً نجد السادس في الأسفل. تأثير هذا الوضع هو إضافة ثلاثة حدود بدلاً من إضافة حد واحد $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$، أي:

$$\Delta V := \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}$$

وهي عبارة معروفة بـــ "لابلاس V " [نسبة إلى الرياضي لابلاس Laplace]

هناك مشكل آخر، يتمثل في كون التدفق المعطى بهذه المعادلة بإمكانه زيادة أو تخفيض كثافة الماء، وهذا يناقض في الحقيقة القول بأن الماء غير قابل للانضغاط. ما نحتاجه –إذا ما تخيّلنا مكعباً صغيراً حول كل نقطة– هو أن تكون عند كل نقطة كمية الماء الداخلة إلى المكعب تساوي كمية الماء الخارجة منه. هناك طريقة جدّ بسيطة للتأكد من هذا الوضع : تفرّق V (الذي نرمز إليه بـــ $\mathrm{div}(V)$) ينبغي أن يكون معدوماً في كل وقت. إذا كان $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $V = (V_1, V_2, V_3)$، فإن تفرّق V :

$$\mathrm{div}(V) := \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0.$$

إذا اعتبرنا المشتقات كنهاية، فإن انعدام التفرّق يؤكد أن :

$$\begin{aligned}
&V_1(x_1+\delta, x_2, x_3) - V_1(x_1-\delta, x_2, x_3)\\
&+V_2(x_1, x_2+\delta, x_3) - V_2(x_1, x_2-\delta, x_3)\\
&+V_3(x_1, x_2, x_3+\delta) - V_3(x_1, x_2, x_3-\delta) \quad \to 0
\end{aligned}$$

وهي الكميات المضافة للماء المتدفق خارجاً، تحذف منه كمية الماء المتدفق داخلاً في كل وجه من الأوجه الستة للمكعب الصغير، وتجعله مساوياً للصفر.

أخيراً لضمان قيام هذا الوضع، خلال التدفق، ينبغي أن يظل تفرّق V معدوماً، كما نحتاج إلى إضافة قوة أخرى التي يتسبب فيها تدافع جزيئات الماء فيما بينها رافضةً الانضغاط. تقاس مقاومة الانضغاط بالضغط. أما تدرّج gradient الضغط فهو القوة التي تسَرِّع كل جزيئة ماء محافظة بذلك على ثبات الكثافة.

معادلات أولر ونافييه–ستوكس

نحن الآن مستعدون لدمج كل هذا ضمن المعادلة التي تخص التدفق غير القابل للانضغاط. المعادلة لها أربع دوال مجهولة : المركبات الثلاث لـــ V والضغط p. يجب أن يكون هناك ضغط لضمان عدم قابلية الانضغاط. إن معادلة نافييه–ستوكس جملة تتألف من المعادلات الأربع:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = -\nabla p + \upsilon \Delta V,\\ &\mathrm{div}(V) = 0,\end{aligned}}$$

(∇p هنا هو تدرج p، أي الشعاع $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right)$. أما الإشارة السالبة فتكون مبررة بحقيقة أن الطرف الأيسر يمثل التسارع. إذا كان الضغط يتزايد فإن x يتناقص، وبالتالي نتحصل على تسارع

سالب.) هناك حالة خاصة، وهي عندما تكون اللزوجة معدومة (أي $\upsilon = 0$) وتسمى بمعادلة أولر. في النظام الأحادي البعد، عدم قابلية الانضغاط تعني أن السرعة ثابتة. ومن ثمّ، لا تكون هناك صدمات. وقد ثَبُت أيضاً أنه لا توجد صدمات في النظام ثنائي البعد؛ ومن جهة أخرى، مهما كانت دالة السرعة الابتدائية، فيوجد حل وحيد بالنسبة للزمن حتى لو كان غير منته. أما حالة الأبعاد الثلاثة، فبدون "ترويض" للزوجة، يبدو احتمال ظهور التفردات أمرا واردا بقوة– لكن، لم يبتّ أحد في هذا الموضوع بعدُ.

7. المراجع

1. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Alexandre Chorin & Jerrold Marsden, Springer, 1993.
2. Wikipedia article http://en.wikipedia.org/wiki/Burgers'_equation.
3. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Lokenath Debnath, Birjauser-Boston, 2004.