محاولة التنبؤ بمسار ورقة عائمة: فوضى وتنبؤات

بقلم: سيزار ر. دي أوليفييرا Cesar R. de Oliveira / الجامعة الاتحادية ساو كارلس São Carlos (البرازيل)

ترجمة: أمينة أودغيري ونسمة زبيري

ما هو المسار الذي ستتبعه ورقة عائمة أسفل تيار مضطرب؟ هل من الممكن إيجاد نموذج رياضي من شأنه توقع مثل هذه الحركة؟ هل هذه المسألة من نفس نوع مسار الكواكب عند دورانها حول الشمس؟ لقد تبيّن أنه بالإمكان التنبؤ ببعض الحركات دون الأخرى، حتى عند إحاطتنا بكل القواعد التي تحكم حركة الأشياء، ومعرفتنا الدقيقة للشروط الابتدائية. المشكلة لا تكمن في تعقيدات المسألة فحسب: يمكننا نمذجة أنظمة يستحيل التنبؤ بها، وذلك باستعمال معادلات جدُّ بسيطة.

في هذه المقالة القصيرة، نوضح رياضياً وجود أنظمة ديناميكية فوضوية باستخدام النموذج العشري للأعداد الحقيقية. سنرى كيف أن استحالة التنبؤ يمكن أن تتولد ببساطة. من المعلوم أن أحد الأهداف الرئيسية للنماذج النظرية هو الوصول إلى تنبؤات (جيدة). غير أن هناك أنظمة ديناميكية حتمية يستحيل التنبؤ بها عملياً؛ وهي ما يسمى بالأنظمة الفوضوية. الهدف من هذه المقالة هو مناقشة كيف تنتُج عدم القدرة على التنبؤ. أما الأداة الرئيسية هنا فستكون التمثيل العشري للأعداد الحقيقية.

المقصود بنظام الديناميكية الحتمية هو النموذج الرياضي بقاعدة تطور (زمني) واضحة المعالم بحيث إذا عرفنا كيف تَشكَّل النظام في الوقت الحاضر، استطعنا (نظرياً، على الأقل) معرفة الكيفية التي سيتشكل بها في المستقبل. هناك مثال أساسي حول الأنظمة الحتمية يتمثل في وجود كوكب (وحيد) يدور حول نجم. النموذج الرياضي لذلك هو قانون نيوتن Newton الثاني للميكانيكا الكلاسيكية، وأما التشكل الابتدائي فهو موقع وسرعة الكوكب في لحظة معينة. انطلاقا من ذلك فإننا نستطيع التنبؤ بتكويناته المستقبلية بكل دقة.

بالنسبة إلى الحركات الفوضوية، هناك تعاريف مختلفة انتشرت في الكتابات المتخصصة. يتفق العديد من المؤلفين في نقطة منها، على الأقل: الحركات الفوضوية موجودة، فعلاً. لقد استخدم مصطلح "الفوضى" chaos في عالم النماذج كمرادف لـــ "متقلب"، "مضطرب"، "غير متوقع"، "عشوائي"، "غير منتظم"، إلخ. والفوضى بهذا المعنى كثيراً ما لوحظت من خلال المحاكاة العددية والتجارب المخبرية. وقد شاع هذا المصطلح في الأنظمة الحتمية من خلال تيين–يين لي Tien-Yien Li وجيمس أ. يورك . لي James A. Yorke في عنوان عمل لهما منشور سنة 1975. ولكن معناه في هذا السياق لم يكن ذلك المعروض في القاموس. المثال المألوف للحركة الفوضوية هو ذاك المتمثل في ورقة صغيرة موجودة في مجرى ماء مضطرب.

لا يتطلب السلوك المعقد في الأنظمة الديناميكية معادلات معقدة! نستغل فيما يلي هذه الخصوصية في نماذج قائمة على التمثيل العشري للأعداد الحقيقية. وهكذا ستتمثل الخطوة الأولى في تحليل قصير لمثل تلك التمثيلات، قبل تقديم النماذج. ندعو القراء لاستخدام قلم وورق للتحقق من بعض الخطوات الموالية.

التمثيل العشري

الأعداد الحقيقية في المجال $I=[0,1)$ مصنفة إلى أعداد ناطقة وأعداد صماء. والأعداد الناطقة (المنتمية إلى I) هي تلك التي تكتب على الشكل $\frac{p}{q}$، علما أن p و q عددان طبيعيان، حيث $q\neq 0$ و $p<q$. عندما تكتب الأعداد الناطقة في شكل عشري، تكون الأرقام التي نجدها بعد الفاصلة عددا منتهيا من الأرقام غير المعدومة، وإلا تكررت فيها لانهائيا مجموعة منتهية من الأرقام. هذا ما يسمى بالتكرار العشري. مثال ذلك : $\frac{1}{4}=0.25000...$ و $\frac{2}{11}=0.18181818...$. من الجائز أن تحدث حالات مثل $0.531297575757575...$ والتي تسمى أيضاً تكرارا عشريا.

أما الأعداد الصماء فهي تلك التمثيلات العشرية التي يرد فيها عدد غير منته من الأرقام غير المعدومة بعد الفاصلة، لكن بدون تكرار لانهائي لعدد منته من الأرقام (خلافًا لحالة الأعداد الناطقة). لعل العدد الأصم الأكثر شهرة هو العدد π. إن $\frac{\pi}{10}=0.314159265...$ أيضاً عدد أصم وينتمي إلى I.

لننظر الآن عن كثب لمعنى الكتابة 0.25. الرقم الأول 0 يعني، بوضوح، أن هذا العدد (نقطة) محصور بين 0 و 1. بما أن أساس الكتابة عشري، فالأرقام 0، 1، 2، 3،...،9 تستخدم لتمثيل كل الأعداد. ولذلك يُقسَّم المجال I إلى عشرة مجالات جزئية

$$[0,0.1),\ [0.1,0.2),\ [0.2,0.3),\ \dots,\ [0.9,1).$$

يعني الرقم 2 أن العدد 0.25 –في هذا التقسيم الأول للمجال I– يقع في المجال الجزئي الثالث. والآن نقسم المجال الجزئي الثالث إلى عشرة مجلات جزئية أخرى، والتي هي:

$$[0.20,0.21),\ [0.21,0.22),\ ...,[0.29,0.30).$$

يفيدنا الرقم 5 في العدد 0.25 بأن هذا الأخير موجود في واحد من هذه المجالات الجزئية، وأن هذا المجال هو السادس. وبما أن كل الأرقام المتبقية معدومة فهذا العدد موجود دائماً في أوّل مجال جزئي يبدأ بـــ 0.25، وهذا بالنسبة لجميع التقسيمات الفرعية اللاحقة.

نلاحظ أن لبعض الأعداد أكثر من تمثيل عشري. بتعبير أدق، فإن عدد تلك التمثيلات اثنان. على سبيل المثال: $1 = 0.99999...$. من الممكن أن تقتنع بهذا عن طريق تحليل المجالات الجزئية المغلقة التي تشمل $0.9999...$، (أي دائماً في آخر المجالات الجزئية... التي تنتهي بـــ 1)، أو نفكر في ذلك على النحو التالي: إذا كان $x = 0.9999...$ فإن $10x = 9.9999... = 9 + x$، وهكذا : $10x - x = 9$، ومنه $x = 1$. هذه التمثيلات العشرية المزدوجة الممكنة تظهر فقط مع تكرارات 9 انطلاقا من موضع معيّن (هذا ليس أمرًا بديهيا بل يتطلب برهانا مفصلا لن نناقشه هنا). سوف لن نعتبر مثل هذه التمثيلات الخاصة في بقية المقالة، ولذا ستكون وحدانية التمثيل لكل عدد حقيقي مضمونة في سياق هذه المقالة.

عند استعمال هذه الملاحظات حول التمثيلات العشرية، يمكننا أحياناً إنشاء أعداد مناسبة لبعض الفرضيات. يكفي، لهذا الغرض، اختيار مجالات جزئية متعاقبة بطريقة مناسبة. سيكون ذلك أمرا أساسياً فيما يلي؛ وبوجه خاص، أثناء وصف الأنظمة ذات الخواص الفوضوية.

الأنظمة الحتمية والفوضى

كما أسلفنا، فإن مصطلح "الفوضى" في الحركيات (الديناميكا dynamics) يشير إلى السلوكات التي لا يمكننا في الواقع التنبؤ بها، رغم أنها تتولد عن أنظمة حتمية. والسؤال هو : كيف يحدث ذلك؟

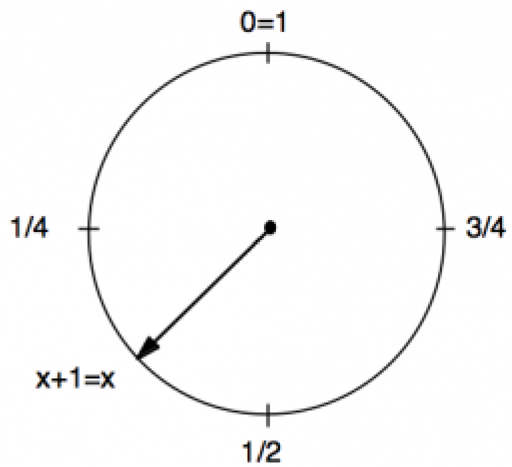
دعنا نمرّ الآن إلى الحديث عن نظامين ديناميكيين قد يبدوان متشابهين في الوهلة الأولى. النموذجان حتميان : الأول لا يمثل حركة فوضوية، وهو يؤدي أيضا دور "التسخين"، في حين يتمتع النموذج الثاني بالعديد من الحركيات. وعلى الرغم من أن مثل هذه النماذج ليس مرتبطا مباشرة بحالات فيزيائية، فحالة النموذجين المذكورين مهمة بسبب قوانين تطورها البسيطة، ذلك أنها تسمح بفهم خصائصها الديناميكية بكل سهولة.

مثال لنظام منتظم

المثال الأول لا يمثل أية فوضى، ولذا نسميه حالة منتظمة regular. نلاحظ أن تشكيلاته الممكنة هي نقاط من المجال I مع تغيير طفيف: نصل طرفي المجال 0 و 1 فيما بينهما فيصبح المجال

دائرة (تخيّل حبلاً بطرفين ملتصقتين). القاعدة العامة للعمل بحالة وصل طرفي المجال بسيطة: إذا كان العدد لا ينتمي إلى $[0,1[$، نطرح جزءه الصحيح، والذي يوافق عدد الدورات الكاملة حول الدائرة، ومن ثم نعود إلى نفس النقطة (أنظر الشكل 1). مثال ذلك : في حالة 3.141592، يمثل الجزء الصحيح 3 ثلاث دورات كاملة التي لا تغيّر تشكيل النظام. مما يعطي العدد 0.141592 المنتمي إلى المجال $[0,1[$. نلاحظ في هذا السياق أن الأعداد 0 و 1 و 32 و 67 تمثل نفس التشكيل "0". العدد 1 يفيد بأننا نتوقف عند 0 بعد قيامنا بدورة كاملة، والعدد 32 يعني أننا قمنا بـــ 32 دورة كاملة، وهكذا دواليك.

يُحدَّد التطور الزمني بقانون حتمي. إذا كان التشكيل الإبتدائي للنظام (يُفرض دائماً أنه مُعطى عند اللحظة 0) هو $x_0 \in I$ فإن النظام سيكون في $x_1 = \frac{x_0}{10}$ عند اللّحظة 1؛ وسيصبح عند اللّحظة 2 في $x_2 = \frac{x_0}{100}$؛ وفي لحظة كيفية n سيكون في $x_n = \frac{x_0}{10^n}$.



الشكل 1: التشكيلات المحتملة في الأمثلة

من المتوقع أن يصل النظام الحتمي إلى نوع من التوازن عندما تطول المدة، وهذا يعني في لغة الرياضيات جعل الزمن n "يؤول إلى لانهاية"، ونرمز لذلك بـــ $n \to \infty$. في هذا المثال، عندما يكون n كبيرا فإن تشكيلاته المتعاقبة تقترب من الصفر، وهذا مهما كانت الشرط الابتدائي x_0. مثال ذلك : إذا كان $x_0 = 0.314159...$ يأتي : $x_1 = 0.0314159...$، $x_6 = 0.000000314159...$، الخ. نلاحظ هنا أن التوازن يكون دائماً موصوفا بموضع الصفر. إنّه حقا نظام منتظم.

مثال لنظام فوضوي

سنعرض تحت هذا العنوان نموذجا رياضيا ذي سلوك فوضوي. يتعلق الأمر هنا بتكييف بسيط لنظام معروف لدى الأخصّائيين.

التشكيلات المحتملة لهذا النظام هي المجال I الوارد في المثال السابق، أي مجال موصول الطرفين. يُعطى التطور الزمني بالقانون التالي: إذا كان x_0 هو التشكيل الابتدائي فسيكون النظام عند اللّحظة 1 في $x_1 = 10x_0$؛ وعند اللّحظة 2 سيصبح في $x_2 = 100x_0$؛ وعند لحظة كيفية n سيكون في $x_n = 10^n x_0$. إن وصل طرفي المجال مفترض في كل لحظة زمنية. ولذا، إذا كان $x_0 = 0.1234567$، فسيكون $x_1 = 1.234567 = 0.234567$ و $x_5 = 0.67$. نلاحظ هنا أيضا أننا أمام نظام حتمي.

إنها فكرة جيدة أن نوضح كيفية حساب مدار الشرط الابتدائي في الحالة التالية مثلا (يتعلق الأمر هنا بالأرقام العشرية المتوالية للعدد π) :

$x_0 = 0.31415926535897932384...$، ثم $x_1 = 0.14159265358979323846$،

$x_2 = 0.41592653589793238462...$، $x_3 = 0.15926535897932384626...$، وهكذا دواليك.

سنناقش أدناه بعض احتمالات التوازن في هذا النظام لمّا $n \to \infty$.

إذا كان $x_0 = 0.1$، أو 0.2، لدينا (بناءً على القاعدة $x_n = 10^n x_0$ والتخلص من الجزء الصحيح) $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. ومن ثم يتم وصف التوازن بموقع 0. أما إذا كان $x_0 = 0.09$ فلدينا $x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$. وبالمثل، بالنسبة لــ $x_0 = 0.1234567$، ينتج أن $x_n = 0$ من أجل كل $n \geq 7$. انطلاقا من هذه الحالات، نلاحظ أنه إذا كان x_0 عددا ناطقا من I وتمثيله العشري يمتلك عددا منتهيا من الأرقام العشرية غير المعدومة، فالتوازن سيكون دائماً موصوفاً بموضع الصفر.

أما في حالة أعداد ناطقة ممثلة بتكرار أرقام عشرية، سيكون التوازن عموماً ممثلاً بمدار دوري. هاك بعض الأمثلة التي تفسر معنى المدار الدوري في هذا السياق :

في حالة $x_0 = \frac{2}{11} = 0.18181818...$ سيكون $x_1 = 0.81818181...$، $x_2 = 0.181818... = x_0$. ومن ثمّ $x_0 = x_2 = x_4 = ...$، بينما $x_1 = x_3 = x_5 = ...$. والتوازن يصبح موصوفا بمدار دورته 2 معطى بـــ $\{x_0, x_1\}$.

أما عندما نعتبر $x_0 = \frac{200}{297} = 0.673400673400673400...$، فإن التوازن سيكون مدارا دورته 6، هو $\{x_0, x_1, ..., x_5\}$، علما أن $x_0 = x_6$ و $x_j \neq x_k$ إذا كان $j \neq k$ وكان الدليلان j و k في المجموعة $\{0,1,2,3,4,5\}$. نتبنى نفس الفكرة لتقديم أمثلة لمدارات من أي دور كان.

إذا كان الشرط الابتدائي عدداً أصم، يمكن للتوازن أن يكون أكثر تعقيداً. هناك عدد كبير من الإمكانيات، ومن الجائز أن يصعب وصفها في بعض الحالات. ومع ذلك، نستطيع القول إن الأمر سوف لن يتعلق بحالة مدارات دورية (نظراً لكون التمثيل العشري في هذه الحالة ليس تمثيلا تكراريا). سنناقش بعض الحالات لاحقاً.

ثمة طريقة فعالة لتقدير المسافة بين نقطتين من I عندما نعمل بالتمثيل العشري، وهي : نحسب انطلاقا من النقطة العشرية كم عدد الأرقام المتعاقبة والمتطابقة في النقطتين. على سبيل المثال، إذا كان $y = 0.\underline{1214}639$ و $x = 0.\underline{12146}1722$، فالمسافة بينهما تكون أقل من 10^{-5} أو تساويه.

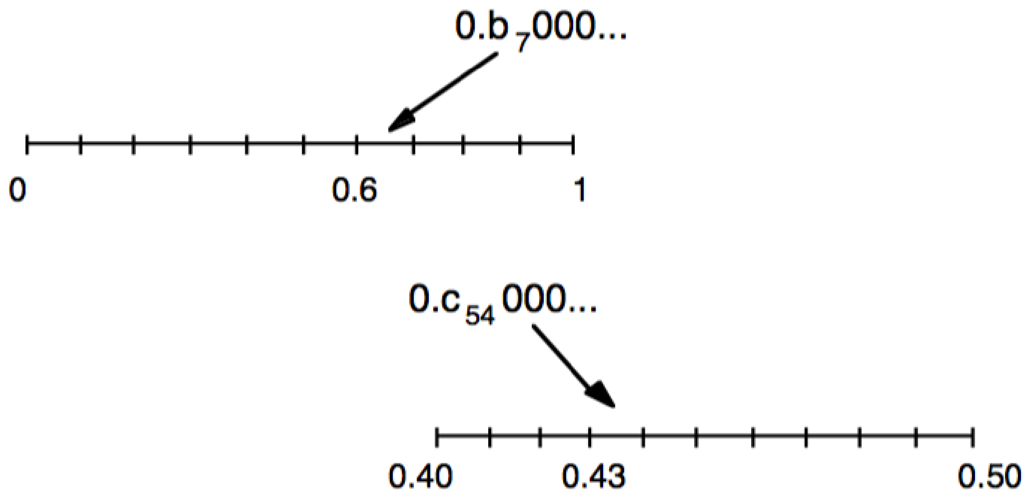
والآن، إذا كان a_j يمثل رقماً من المجموعة $\{0,1,2,...,9\}$ واعتبرنا الشرط الابتدائي

$$x_0 = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6...$$

فإنه توجد شروط ابتدائية تولد مدارات دورية قريبة بالقدر الذي نريد من x_0 (إنها تسمى كثافة المدارات الدورية). الشرط الابتدائي الجديد

$$z_0 = 0.a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4...$$

يتطابق مع مدار دوري دورته 4، والمسافة التي تفصله عن x_0 أقل من 10^{-4} أو تساويه (نستعمل، عند الضرورة، الكتل $a_1a_2a_3a_4b$ مع $b \neq a_5$). نتابع العمل بهذه الطريقة، فنتحصل على مدارات دورية بأدوار كبيرة، شروطها الابتدائية قريبة بالقدر الذي نريد من x_0. من ناحية أخرى، نلاحظ أن لـــ $y_0 = 0.a_1a_2a_3 0000...$ صفرا في موقع توازنه، ومسافته إلى x_0 أقل من 10^{-3}، في حين نجد العدد $z_0 = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6 314159265...$ يتوافق مع عدد أصم مسافته إلى x_0 أقل من 10^{-6}.



الشكل 2: رسم توضيحي لإنشاء كتل للأرقام a_1، b_j، c_k ...

بعد ذلك نعتبر توازنا خاصا مولدا ببعض الأعداد الصماء. ليكن

$$\bar{x}_0 = 0.a_1b_1b_2...b_{10}c_1c_2c_3...c_{100}d_1d_2...d_{1000}...,$$

حيث a_1، b_j، c_k... كتل محدودة مؤلفة من عدد منته من الأرقام الواقعة بين 0 و 9، اختيرت كالتالي:

- $0.a_1...$ تنتمي إلى المجال $[0,1)$. لاحظ أنه يمكن استعمال a_1 في جعل $\bar{x}_0$ قريبا من أي عدد معطى.

- بتجزئة $[0,1]$ إلى عشرة مجالات جزئية مثلما فعلنا سابقا، فإن $0.b_1...$ سينتمي إلى أول هذه المجالات الجزئية، كما سينتمي $0.b_2...$ إلى الثاني منها، ...، وسيكون $0.b_{10}...$ في آخر واحد منها. مثلاً: $b_1 = \underline{0}53$، $b_{10} = \underline{9}621$.
- نجزّئ كلا من المجالات الجزئية السابقة الذكر إلى عشرة مجالات أخرى، فنتحصل على مائة مجال جزئي. نختار c_j بحيث ينتمي $0.c_1...$ إلى أول تلك المجالات، وينتمي $0.c_2...$ إلى الثاني منها، ...، ويكون $0.c_{100}...$ في آخر واحد منها. مثلاً: $c_1 = \underline{00}28$، $c_{62} = \underline{61}9277$ و $c_{100} = \underline{99}0176$.

نواصل تقسيم المجالات الجزئية بالطريقة الموضحة أعلاه، ومن ثمّ نستطيع الحصول على شروط ابتدائية في ظل التطور الزمني، أي بلوغ "كل أجزاء" I. المقصود بعبارة "كل أجزاء" هو "كل مجال جزئي من I"؛ لكن المصطلح التقني الأكثر دقّةً هو أن نقول إن "المدار كثيف في I". نصل إلى ذلك بملاحظة مدار $\bar{x}_0$. فعلى سبيل المثال، سيبلغ المجال $[0.50,0.51]$ عندما يصل إلى

$$0.c_{51}c_{52}c_{53}...c_{100}d_1d_2d_{1000}...$$

وهكذا دواليك. هذا السلوك (أي بلوغ كل أجزاء I) يجب أن يدرك "التوازن" في هذا المدار لمّا $n \to \infty$.

ومن الأهمية بمكان ملاحظة أنه يمكن اختيار كل واحدة من الكتل $a_1, b_j, c_k,...$ من بين العديد من الإمكانيات، وهو ما يبيّن أن مدارات عدد غير منته من الشروط الابتدائية تبلغ جميع أجزاء $[0,1]$ عبر التطور الزمني. هناك إمكانيات أخرى، والقرّاء مدعوون هنا لممارسة قدراتهم الإبداعية! فكّروا، مثلا، في الشروط الابتدائية التي تبلغ مداراتها كل أجزاء المجال $[0,1/2]$ وحده.

بالنسبة للشرط الابتدائي المذكور أعلاه $\bar{x}_0$، نُذكّر أننا نستطيع اختيار a_1 بحيث يكون $\bar{x}_0$ قريبا، بالقدر الذي نريد، من أية نقطة معلومة من $[0,1]$. ومن ثمّ، توجد شروط ابتدائية تغطي مداراتها كل أجزاء I، وتقترب بالقدر الذي نريد من كل شرط ابتدائي دوري معطى. كما تقترب من الشروط الابتدائية التي تكون مواقع توازنها محددة بموضع الصفر. ولذلك توجد أنواع ثلاثة من التوازنات، على الأقل، شروطها الابتدائية متشابكة. نستطيع أيضاً اعتبار المدارات الدورية بأدوار مختلفة كأنواع متمايزة من التوازنات؛ هذا الاختيار يتوقف على ميولات كل مؤلف.

وهكذا، نلاحظ في هذا المثال، على عكس المثال الأول، أن الشروط الابتدائية المختلفة بإمكانها تمثيل أنواع توازن مختلف. ما الذي ينقصنا بعدُ لوصف الحركة الفوضوية؟ من المؤكد أن مختلف السلوكات المتشابكة ستزيد في استحالة التنبؤ بالحركيات. بمعنى أن بجوار كل شرط ابتدائي هناك عدد غير منته من الشروط الابتدائية الأخرى ذات توازنات مختلفة.

نشير هنا إلى عنصر مهم آخر: عملياً، كل تشكيل ابتدائي سيكون معروفا بدقة محدودة لأنه يوجد دائماً خطأ مردّه التجربة أو البتر. نلاحظ في الأنظمة الفيزيائية، أنه فضلا عن ضعف الدقة في

المعطيات الابتدائية، فقد تحدث أيضاً اضطرابات خارجية محدودة ، مثل التغيرات في درجة الحرارة، إلخ.

الصورة الآن صارت واضحة المعالم: هناك عدة أنواع متميازة للتطور الزمني، شروطها الابتدائية لصيقة ببعضها البعض، وذات دقة محدودة في معطياتها الابتدائية. لا أحد يعلم أي نوع من التوازن سيُدرَك عندما يؤول n إلى ∞.

من العناصر المؤدية إلى السلوك الفوضوي هو التمدد (لم تحدث هذه الحالة في المثال الأول أعلاه، وفي هذا المثال) الذي يعني أن، في كل لحظة، تُضرب المسافة بين نقطتين متلاصقتين في 10. يسمى ذلك "الحساسية للشروط الابتدائية". لمزيد من التوضيح، نفرض أن الشرط الابتدائي x_0 معطى بدقة واحد من المليون، أي، أننا نفرض أنه يمكن أن يكون في أي مكان من x_0 إلى x_0+10^{-6}. بتقدم الزمن، عند اللّحظة 1 سيكون هذا المدى من الدقة مضروباً في عشرة، وسيكون له مدى 10^{-5}. وعند اللّحظة 2 سيبلغ مداه 10^{-4}. وعند اللّحظة 6 سيصبح مداه 1. لكن هذا الأخير هو طول المجال I. وهكذا، بعد 6 لحظات فقط فكل نقطة من I يمكن أن تصف النظام. إنّه وضع فوضوي!

باستخدام بعض الأدوات الرياضية المتطورة، نرى أن التطور الزمني لــ "أغلبية" (أي باستثناء مجموعة ذات "طول معدوم") الشروط الابتدائية في هذا المثال تتصرف مثل $\bar{x}_0$ السابق الذكر، ذي المدار الكثيف في المجال I. وبالتالي فالشرط الابتدائي $\bar{x}_0$ –المنشأ خصيصا لهذا الغرض– ليس في الواقع، أبدًا، استثناءً.

نشير إلى أن الأمثلة المقدمة أعلاه قد أنشئت باستخدام سلسلة رموز (الرموز في هذه الحالة هي $\{0,1,2,...,9\}$) مرتبطة بالتمثيل العشري للأعداد الحقيقية. كما تم توضيح الحركيات (الديناميكا)، وكانت آلية الفوضى ظاهرة. من المفيد أن نلاحظ أنه يمكننا –باستخدام وسائل البحث الرياضي المألوفة– إظهار السلوك الفوضوي لبعض الأنظمة الديناميكية الحتمية المتطورة التي تنمذج ظواهر فيزيائية (هذه المهمة ليست عموما بسيطة). وتتجلى هذه السلوكات بطريقة مشابهة لتلك الواردة أعلاه. والمبدأ الأساسي هو نفسه: وجود منطقة تتمتع بـــ :

(1) مدار دوري حتمي قريب بالقدر الذي نريد من أي شرط ابتدائي،

(2) وجود كثافة للمدارات في المنطقة،

(3) وجود حساسية للشروط الابتدائية.

من الواضح أن مفهوم الـــ "إظهار" المستعمل آنفا ينبغي أن يُدقق، لكن الهدف هو الحصول على خصائص ديناميكية تعتمد على رموز كما بيّنا أعلاه عبر التمثيل العشري.

هناك العديد من الجوانب للفوضى التي لم نتطرق إليها في هذه المقالة القصيرة، مثل ارتباطها بالهندسة الكسورية، وبالأبعاد الكسرية وبالنظرية المَسْرانية ergodic [انظر المرجعين 2، 6]. لكن الهدف هنا ليس استعراضاً مفصّلاً للموضوع، ثم إن التقديم كان لا شك متأثرا بميولات المؤلف.

تجدر الملاحظة إلى أن هناك بعض الأوضاع تؤدي فيها حالة الفوضى الديناميكية دورا غير مرغوب فيه: إذ يمكن أن تتداخل مع الحالة الجيدة، وأن تكون مسؤولةً عن حالات عدم استقرار الكواكب، وأن تتسبب في اضطراب ديناميكي هوائي، إلخ. من جهة أخرى، هناك دراسات تعتبر الفوضى كآلية مسؤولة عن حسن سير مختلف أعضاء الحيوانات، مثل القلب والدّماغ. وبالتالي، من الطبيعي أن نتساءل: كيف يمكن لميزات الفوضى أن تتحوّل إلى خلق نوع من الاستقرار يكون مسؤولاً عن حسن سير شيء ما؟ وبصفة خاصة في حالة الدماغ : كيف يمكن أن تكون الفوضى مسؤولة عن وفرة إنتاج أنماط أصلية؟ لا شك أن الوضع أكثر ثراءً من توقعات مسار الورقة العائمة. ومازالت هناك العديد من التطبيقات التي تنتظر منا التدقيق والاستيعاب.

شكر وتقدير: أشكر الأستاذ ماريو ج.د. كارنيرو Mario J.D. Carneiro على تزويدنا بنصه حول هذا الموضوع، والشكر موصول إلى المجلس القومي للتنمية العلمية والتقانية البرازيلي "CNPq".

المراجع

[1] F. L. da Silveira, Deteminismo, previsibilidade e caos, Cad. Catar. Ens. Física 10 (2) (1993), 137–147.
(http://www.if.ufrgs.br/~lang/Textos/Determinismo−previsibilidade−caos.pdf)

[2] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Rev. Modern Phys. 57 (1985), 617–656.

[3] J. Ford, How random is a coin toss?, Physics Today 36 (4) (1983), 40–47.

[4] J. Gleick, Chaos: Making a New Science, Penguin Books, Revised edition, 2008.

[5] W. M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Second edition, Academic Press, New York, 2003.

[6] D. Ruelle, Chaotic Evolution and Strange Attractors, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[7] S. Spezamiglio, W. F. Pereira, Ordem no caos de Devaney, Matemática Universitária 35 (2003), 31–40.