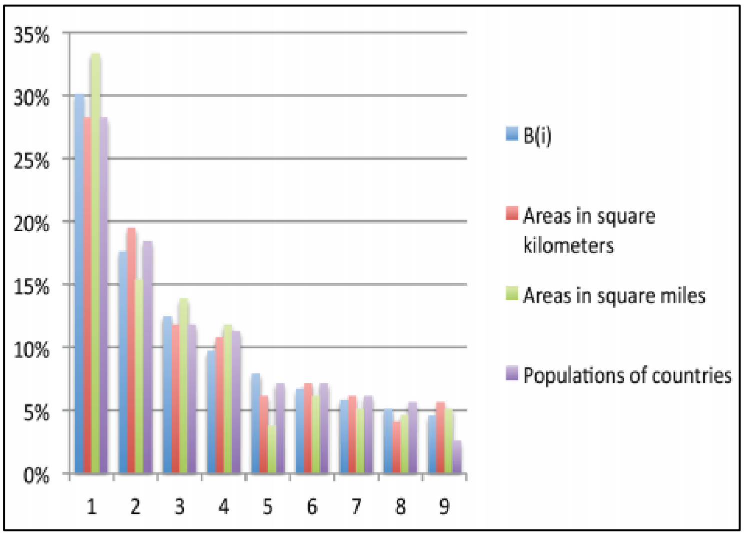
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ច្បាប់លោក *Benford*



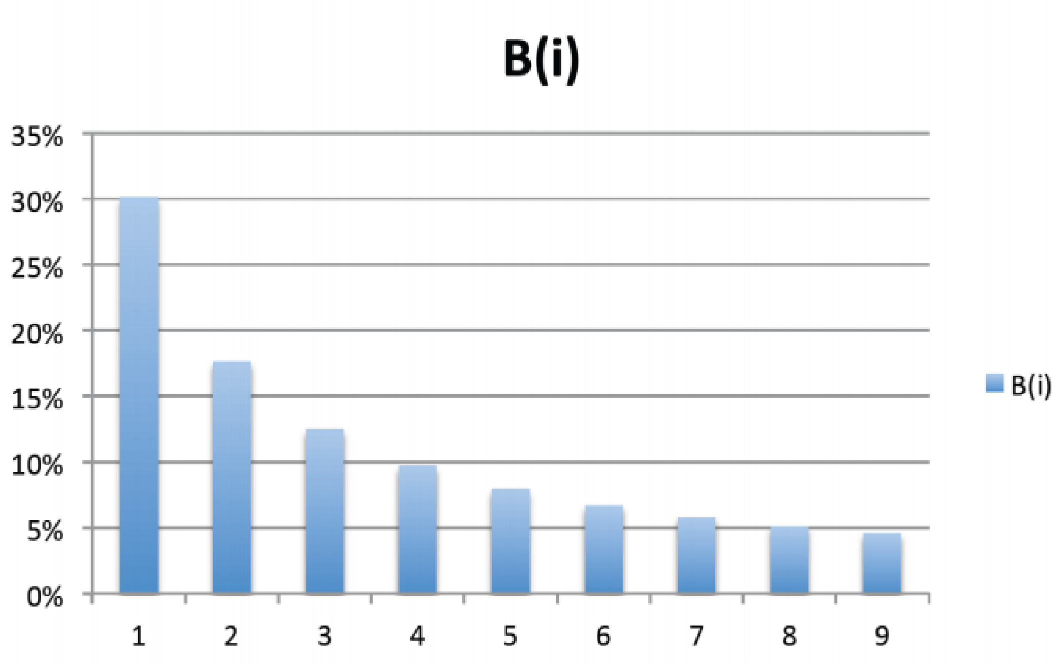
អស់រយៈពេលជាយូរណាស់មកហើយ ដែលមានចំនួនជាច្រើន ដែលប្រើប្រាស់នៅក្នុងហិរញ្ញវត្ថុ ប្រសិនបើមិនមានអ្នកចេះគណិតវិទ្យានោះទេ ជាការពិតណាស់ ដែលលេខយ៉ាងច្រើនត្រូវបានប្រើប្រាស់នៅក្នុងហិរញ្ញវត្ថុដោយប្រើរូបមន្តគណិតវិទ្យា ដែលហៅថាច្បាប់ *Benford* ឬច្បាប់សំខាន់សម្រាប់លេខដំបូង។ ប្រសិនបើ យើងមិនបានប្រើរូបមន្តនេះធ្វើការវិភាគលើស្ថិតិរបស់យើង នោះនឹងមានការខាតបង់ ហើយក៏ដូចជាការមិនបានគិតហ្មត់ចត់ដែរ។ ច្បាប់ *Benford* ចែងថា បើយើងប្រមូលទន្និន័យជាច្រើនដោយចៃដន្យ ហើយគណនាប្រេកង់តួលេខសំខាន់ដំបូង នោះតួលេខមួយសំខាន់ដំបូងកើតមានចន្លោះ 30% ក្នុងពេលនោះ។ ពេលដែលតួលេខសំខាន់ដំបូងលេខ 9 នោះកើតមាន 4.5% ក្នុងពេលនោះ។ រូបមន្តនេះយើងសង្កេតឃើញថា ភាគច្រើននៅក្នុងសំណុំគឺដូចទៅនឹងស្វ័យគុណរបស់ស្វ៊ីត *Fiboncci*។ ហេតុអ្វី? ឥឡូវយើងនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់ការបង្ហាញ។ យើងនឹងបង្ហាញឲ្យឃើញទាំងអស់គ្នានូវច្បាប់ *Benford* ដែលបានធ្វើបំណែងចែកតួលេខសំខាន់ដំបូងនៃចំនួនតួលេខសំខាន់ដំបូង ជាចំនួនវិជ្ជមានខិតជិតសូន្យ ជាកន្សោមទសភាគ។ ឧទាហរណ៍ តួលេខសំខាន់នៃ π គឺ 3 នោះ 2371.5 គឺ 2 និង 0.00563 គឺ 5។

វិធីសាស្ត្រផ្សេងទៀតដែលមានសារៈប្រយោជន៍ក្នុងការសិក្សាគណិតវិទ្យា សរសេរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ពេលដែល $m\in[1,9)$ ជងស្វ័យគុណនៃ 10 នោះ $x=m10^n, n\in Z$ ។

នៅពេលដែលតួលេខសំខាន់ដំបូង x ជាចំនួនគត់ ផ្នែក m តាងដោយ $[m]$ ចំនួន m ហៅថា *Mantissa(a)* នៃ x។ ឥឡូវយើងសន្មត់ថា បើយើងជ្រើសរើសចំនួនណាមួយដោយចៃដន្យតាមកុំព្យូទ័រជាប្រេកង់ $B(i)$ នៃតួលេខសំខាន់ជាងគេ i នោះ $B(i)$ ដែលទទួលបានគឺប្រហែល $\log_{10}\left(1+\frac{1}{i}\right)$ ។ ខាងក្រោមនេះជា ប្រេកង់ដែលយើងទទួលបាន៖

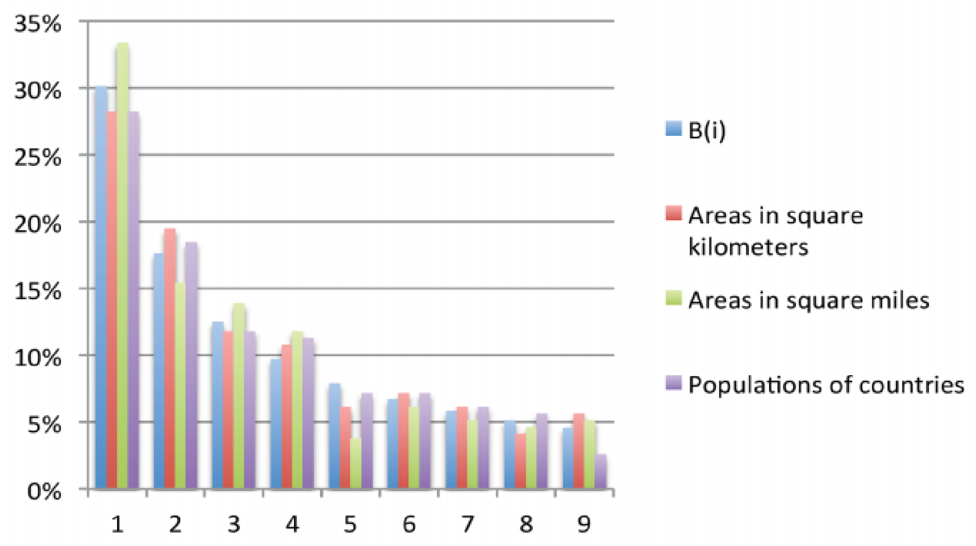
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B(i)$	0.3010	0.1761	0.1249	0.0969	0.0792	0.0669	0.0580	0.0511	0.0458

តារាងប្រេកង់នៃច្បាប់ *Benford*



រូបភាពទី1: ប្រេកង់ B(i) នៃច្បាប់ *Benford*

ឥឡូវនេះយើងកត់ត្រាសង្ខេបនៃប្រវត្តិសាស្ត្របាតុភូតដែលបានរកឃើញដំបូងដោយតារាវិទូ *SIMON NEWCOME* (1835-1909) ដែលបានផ្សព្វផ្សាយជាលើកដំបូងនូវទំព័រតារាងលោការីតមានទំនាក់ទំនងដ៏តូចជាលើកដំបូង ដែលសំខាន់ មានមួយចំអាមដៃដែលមានការពេញនិយម ច្រើនបំផុតនៅលើគេហទំព័រ។ ការរកឃើញរបស់គាត់គឺមានភាពមិនច្បាស់លាស់ ហើយច្បាប់ដែលបានបន្ថែមដោយ *Frank Benford* (1883-1948) នៅឆ្នាំ1938។ *Frank Benford* ត្រូវបានហៅថាលំដាប់ទី 10 នៃ 1000 នៃចំនួន ដោយការចាប់ផ្តើមនូវការបង្ហាញច្បាប់របស់គាត់។ ទិន្នន័យដែលល្អបំផុតនៃ *SIMON Plaffe* មួយ គឺជាចំនងជើង 215 លានគណិតវិទ្យា ជាចំនងជើងដែលបង្ហាញដោយច្បាប់ *Benford*។ សំនុំច្រើននៃចំនួនដែលមិនបានកំនត់ ដូចការបង្ហាញនៃច្បាប់ *Benford* រឿងហេតុទាំងនេះគឺកើតមានឡើងសម្រាប់ប្រជាជននៃមួយចំនួនជាមួយក្រឡាផ្ទៃនៃប្រទេស ជាមួយប្រវែងនៃទទឹង -ល-។ ប្រហែលអ្នកនឹងបញ្ឈប់ខ្ញុំ ហើយចាប់ផ្តើមនៅក្នុងការរស់នៅ ការស៊ើបសង្កេត... នៅក្នុងកន្លែងមួយណាដែរប្រវែងទាំងនេះ ឬក៏ក្រឡាផ្ទៃបាន? ប្រវែងនៅក្នុង *miles* ឬក៏នៅក្នុង *Kilometers* ទាំងនេះវាមិនសំខាន់ទេ។ បើសិនប្រវែងនៃស្ទឹងស្ថិតក្នុង *Kilometers* គឺបង្ហាញតាមច្បាប់ *Benford*។ បន្ទាប់មក បើប្រវែងស្ថិតក្នុង *Benford* គឺបង្ហាញតាមច្បាប់ *Benford* ដោយប្តូរឯកាតាដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងមាត្រដ្ឋាន។ យើងនឹងឃើញច្បាប់ *Benford* គឺផ្លាស់ប្តូរលក្ខណៈតែមិនប្រែប្រួលមាត្រដ្ឋាន។ ម្យ៉ាងទៀត វាគឺច្បាប់ប្រូបាបតែមួយដែលផ្លាស់ប្តូរលក្ខណៈមិនប្រែលប្រួលនៃមាត្រដ្ឋាន។



រូបភាពទី 2

រូបភាពទី 2 ទិន្នន័យខ្លះប្រហែលទៅនឹងកាបង្ហាញនៃច្បាប់*Benford* ក្រឡាផ្ទៃនៃប្រទេសក្នុងមានលក្ខណៈបួនជ្រុងគិតជាគីឡូម៉ែតក្រឡាផ្ទៃនៃប្រទេសក្នុង មានលក្ខណៈបួនជ្រុងគិតជា *miles* ហើយនិងប្រជាជននៃប្រទេសទាំងនេះ។ ខ្ញុំបានប្រាប់អ្នកក្នុងការណែនាំនៃចំនួន *Fibonacci* ដែលបង្ហាញដោយច្បាប់ *Benford* ប៉ុន្តែនៅក្នុងវិញ្ញាណច្បាប់ *Benford...* ច្បាប់គឺជាកំរិតមួយ ហើយវាអាស្រ័យទៅនិងប្រព័ន្ធគោល១០ សម្រាប់ការសរសេរចំនួនរបស់ពួកយើង ក្នុងនោះគោល b ជាចំនួនមិនសូន្យដែលជាធាតុរបស់សំណុំ $[1......,b-1]$ ហើយច្បាប់របស់ *Benfrod* គោល b តាងដោយប្រេកង់នៃលេខដំបូងគឺ i $B_b(i)=\log_b(1+\frac{1}{i})$ ។ ចំនួន *Fibonacci* អនុវត្តន៍តាមច្បាប់ *Benford* នៃគោល *b*! ច្បាប់របស់ *Benford* គឺជាភាពមិនប្រែប្រួលក្រោមការផ្លាស់ប្តូរគោល។ ហើយគឺជាច្បាប់មិនធ្មមតាមួយនៃប្រូបាបដែលមិនមានភាពប្រែប្រួលក្រោមការផ្លាស់ប្តូរគោល។ ឥលូវនេះពេលវេលានៃការបង្ហាញក័ឈានមកដល់។ គេតម្រូវថា អ្នកគួរតែចងចាំមុខវិជ្ជាប្រូបាបរបស់អ្នកមួយចំនួន ប៉ុន្តែអ្នកអាចធ្វើការពិសោធន៍ដោយខ្លួនអ្នកផ្ទាល់ មុននឹងធ្វើការចាប់ផ្តើមអានមេរៀនអោយស៊ីជម្រៅ។

១. ភាពមិនប្រែប្រួលក្រោមការផ្លាស់ប្តូរមាត្រដ្ឋាន

យើងពិនិត្យទៅលើការផ្លាស់ប្តូរមាត្រដ្ឋានសាមញ្ញមួយដែលទទួលបានដោយសារចំនួនទាំងអស់នៃសំណុំនិងលេខ 2។ ប្រសិនបើយើងពិនិត្យទៅលើចំនួនដំបូង គឺលេខ 1 ពេលនោះលេខដំបូង 1 ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរដោយលេខ 2 ឬ 3។ វាគឺមានភាពងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B(1)=B(2)+B(3)$ ពិត

$$B(2)+B(3)=\log_{10}(1+\frac{1}{2})+\log_{10}(1+\frac{1}{3})$$

$$=\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}$$

$$=\log_{10}\frac{3}{2}\frac{4}{3}=\log_{10}2=B(1)$$

ដូចគ្នាដែរអ្នកអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ $B(2)=B(4)+B(5)$ ប៉ុន្តែ ថាតើអ្នកអាចគ្រប់គ្រង ឬរៀបចំដោយរបៀបណា ប្រសិនបើ អ្នកធ្វើការផ្លាស់ប្តូរខ្នាតពី *miles* ទៅ *Km* ដោយការគុណចំនួន១.៦? ច្បាប់របស់ *Benford* យើងត្រូវការសិក្សាលក្ខណៈទូទៅរបស់វា តើ i មានន័យដូចម្តេច? វាមានន័យថា ជា *mantissa* ដែល m ជារបស់ចន្លោះ $[i.i+1]$។ ដូច្នេះ ច្បាប់របស់ *Benford* គឺជាបំណែងចែកប្រូបាបដោយផ្នែកនៃ *mantissa*។ ជាទូទៅច្បាប់របស់ *Benford* នៃ *mantissa* គឺត្រូវបានឱ្យអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេមួយលើចន្លោះ $[1,10]$។ ពេលនោះយើងអាចជ្រើរើសចំនួនមួយដោយចៃ្ចដន្យ យើងអាចគណនា *mantissa* របស់វា។ យើងយកអថេរចៃ្ចដន្យ M ដែលយកតម្លៃ $[1,10)$។ យើងឃើញថា វាអនុវត្តន៍តាមច្បាប់របស់ *Benford* ប្រសិនបើ វាជាអនុគមនដង់ស៊ីតេដែលឱ្យដោយ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\log 10} & ,x\in[1,10)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

ប្រសិនបើ $P(a\le M<b)$ តាងឱ្យប្រូបាប៊ីលីតេដែល $a\le M<b$ នោះមានន័យថាយើងបាន:

$$P(a\le M<b)=\int_a^b f(x)dx$$

វាគឺជាលក្ខណៈទូទៅនៃច្បាប់របស់ *Benford*

$$\begin{aligned}B(i)=P(i\le M<i+1)&=\int_i^{i+1}\frac{1}{x\log 10}dx\\ &=\frac{1}{\log_{10}}(\log(i+1)-\log(i))=\frac{1}{\log_{10}}(\log\frac{i+1}{i})\\ &=\log_{10}(1+\frac{1}{i})\end{aligned}$$

តើវាមានន័យដូចម្តេចដែលអថេរចៃ្ចដន្យ X នៅចន្លោះ $[1,10)$ ក្រោមភាពមិនផ្លាស់ប្តូរនៃមាត្រដ្ឋាន? វាមានន័យថា ប្រសិនបើ c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយយើងយកអថេរចៃ្ចដន្យ $Y=cX$ ពេលនោះ *mantissa* នៃ M អថេរចៃ្ចដន្យ Y មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេដូច X។ វាមិនមានការលំបាកក្នុងការបង្ហាញថាករណីនេះ X អនុវត្តន៍តាមច្បាប់របស់ *Benford* ប៉ុន្តែមានករណីជាច្រើនដែលសម្គាល់ឃើញថាវាពឹងផ្អែកទៅលើទំហំនៃ c ។ យើងធ្វើមួយករណីហើយនិងឱ្យអ្នកធ្វើករណីផ្សេងទៀត។ យើងអាចសរសេរ $c=m10^r$ ដែល $m\in[1,10)$ ដោយ *mantissa* នៃ cX ដូចគ្នាទៅនឹង *mantissa* នៃ mX វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីសិក្សាទៅលើករណី $c\in[1,10)$។

តើអ្វីជាឧបករណ៍សម្រាប់បង្ហាញ? អ្នកគួរតែរំលឹកមេរៀនប្រូបាបរបស់អ្នកពីព្រោះថា ពេលខ្លះបំណែងចែកអនុគមន៍ វាមានសារៈប្រយោជន៍ជាងអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេសម្រាប់អថេរចៃ្ចដន្យជាប់។ បំណែងចែកអនុគមន៍នៃអថេរចៃ្ចដន្យគឺកំណត់ដោយ $F(x)=P(M\le x)$

បើ X គោរពតាមច្បាប់ *Benford* នោះបំណែងចែកនៃអនុគមន៍គឺ

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \log_{10}x & x\in[1,10)\\ 1 & x\geq 10\end{cases} \qquad (1)$$

ដូចនេះ យើងត្រូវបង្ហាញថាបើ X គោរពតាមច្បាប់ *Benford* និង M គឺជាម៉ង់ទីសនៃ cX ដែល $c\in[1,10)$ នោះបំណែងចែកនៃអនុគមន៍ M ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យដោយសមីការ (1)។ នៅក្នុងន័យនេះ យើងត្រូវគណនា $P(M\leq z)$ ចំពោះ $z\in[1,10]$។ M ជាម៉ង់ទីសនៃ cX ដែលនៅក្នុងចន្លោះតម្លៃ $[c,10c)$ ដូចនេះ $M=cX$ ពេលដែល $cX<10$ និង $cX/10$ ដែល $cX\geq 10$។ នៅក្នុងករណីទី 1 ពេលដែល $z<c$។ សម្រាប់ម៉ង់ទីសនៃ cX ស្ថិតនៅ cX មានករណីដែលអាចកើតឡើងតែមួយគត់គឺ $cX\in[10,10c]$ នោះម៉ង់ទីសនៃ cX គឺ $cX/10$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}P(M\leq z)&=P(1\leq cX/10\leq z)\\&=P\left(\frac{10}{c}\leq X\leq\frac{10z}{c}\right)\\&=F\left(\frac{10z}{c}\right)-F\left(\frac{10}{c}\right)\\&=\log_{10}z+\log_{10}\frac{10}{c}-\log_{10}\frac{10}{c}\\&=\log_{10}z\end{aligned}$$

២. ច្បាប់ *Benford* គឺជាច្បាប់ប្រូបាប៊ីលីតេមួយលើម៉ង់ទីស ដែល X ជាតម្លៃមិនប្រែប្រួលក្រោមកម្រិតប្រែប្រួល

វាហាក់បីដូចជាប្រយោគដែលរំភើប ! មិនមែនទេអ្នកនឹងឃើញថា វាបានបង្ហាញមិនគ្រប់គ្រាន់ជាងមុនពេលដែលមានការជំទាស់ពីពេលមុនដែរ។ តាង X ជាអថេរចៃដន្យតាងម៉ង់ទីស និងមានតម្លៃ $[1,10)$។ យើងស្វែងរកបំណែងចែកអនុគមន៍ $F(x)$ ក្រោមសម្មតិកម្មដែល X ជាតម្លៃមិនប្រែប្រួលក្រោមកម្រិតប្រែប្រួលមួយ នោះយើងត្រូវការគណនា៖ $F(x)=P(X\leq x)=P(1\leq X\leq x)$។

នោះយើងមាន $F(0)=0$ និង $P(10)=1$ ការលំបាកចំបងនៃការបង្ហាញស្ថិតនៅក្នុងការបកស្រាយថាតើអ្វីវាមានន័យដែល X ជាតម្លៃមិនប្រែប្រួលក្រោមកម្រិតប្រែប្រួល $1\leq X\leq x$ និង $c\leq cX\leq cx$ នៅក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ដូចគ្នា យើងបាន $P(1\leq X\leq x)=P(c\leq cX\leq cx)=F(x)$ (2) ម៉្យាងវិញទៀត យើងពិនិត្យមើលករណីខ្លះ $c\in[1,10)$ ដែល $cx<10$ (c អាស្រ័យលើ x)។ សម្រាប់ $c\leq cX\leq cx$,cX គឺស្មើទៅនឹងម៉ង់ទីសរបស់វា។ ដោយ X ជាតម្លៃមិនប្រែប្រួលក្រោមកម្រិតប្រែប្រួល នោះម៉ង់ទីសនៃ cX មានអនុគមន៍បំណែងចែក X នោះ $P(c\leq cX\leq cx)=F(cx)-F(c)$។

បូកបញ្ចូលជាមួយ (2) យើងឃើញថាអនុគមន៍ $F(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$F(x)=F(cx)-F(c)\,,\quad F(1)=0\quad F(10)=1 \qquad (3)$$

គេឲ្យ $C\in[1,10]$ មិនធំដែរ។ យើងត្រូវរក F ពីសមីការអនុគមន៍ (3) ហើយក្រឡេកមើលបែបនេះប្រសិនបើគេតាង $C=1+\varepsilon$ នាំឲ្យ $F(x)=F(x(1+\varepsilon))-F(1+\varepsilon)$ គេអាចសរសេរតែមួយគត់គឺ $\frac{F(x(1+\varepsilon))-F(1+\varepsilon)}{x\varepsilon}=\frac{F(1+\varepsilon)-F(1)}{x\varepsilon}$ ដោយ $F(1)=0$ លីមីត $x\to 0$ យើងត្រូវស្គាល់ផលចែកមួយដែលកំនត់ គឺជាដេរីវេមួយនៅលើផ្នែកខាងឆ្វេងគឺ $\frac{F(x(1+\varepsilon))-F(1+\varepsilon)}{x\varepsilon}$ កំនត់មួយគឺ $F'(x)$ ហើយនៅអង្គខាងស្តាំគឺ $\frac{F(1+\varepsilon)-F(1)}{x\varepsilon}$ ល្បៀងទៅរក $F'(1)$ ។ ដូចនេះយើងបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលអាចបំបែកពីឫសអថេរបាន $F'(x)=\frac{F(1)}{x}$។ ដំណោះស្រាយមួយគឺ $F(x)=F'(1)\ln x+C$ ដោយ $F(1)=0$ យើងមាន $C=0$ ម្យ៉ាងទៀត $F(10)=1$ ហើយ $F'(1)=\frac{1}{\ln 10}$ ដូចនេះ $F(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}=\log_{10}x$ ។

២. ហេតុអ្វីបានជាចំនួនរួមពីដើមតាមរូបមន្ត *Benford*?

ចម្លើយរបស់លោក *Thiedore Hill* ក្នុងឆ្នាំ1995 ហើយយើងនឹងពិភាក្សាសង្ខេបនូវគំនិតរបស់គាត់ ចំពោះសំណុំទាំងអស់ មិនមែនជាសំណុំទាំងអស់នៃចំនួនស្របតាមច្បាប់ *Benford*។ សម្រាប់ការកើនឡើងម្តងប្រសិនបើយើងរាប់កម្ពស់មនុស្សច្រើនជាងម៉ែតលើកលែងតែមួយចំនួនប៉ុណ្ណោះ ក្នុងចំណោមពី 1 និង 2 នឹងកើនឡើង ប្រសិនបើអ្នកផ្លាស់ប្តូរទំហំជា *feet* (*1 foot* ប្រហែល 30*cm*) អ្នកនឹងផ្លាស់ប្តូរពីការចែកសញ្ញាណដំបូងពី 0 ទៅ 99។ ដូចនេះសំណុំចំនួនមិនផ្លាស់ប្តូរមាត្រដ្ឋាននោះទេ។ មានភាពខុសគ្នារបស់សំណុំរងនៃចំនួនជាមួយនឹងមាត្រដ្ឋានពិសេសព្រោះថាសំណុំគឺវាធំ ហើយជាចំនួនដែលយកមកពី 0 ដល់ 9 ធំជាង។ ភាពខុសគ្នាយ៉ោងច្រើននៅពេលដែលមានមាត្រដ្ឋានច្រើន។ គុណចំនួនទាំងអស់ដែលមានក្នុងសំណុំដោយចំនួនថេរវិជ្ជមាន នាំឲ្យផ្លាស់ប្តូរនៃវត្ថុ មានរបស់មាត្រដ្ឋានក្នុងសំណុំថ្មី។ ដូច្នេះយើងរំពឹងសំណុំនៃចំនួន នឹងមាន ប្រសិនបើវាគ្មានមាត្រដ្ឋានពិសេសណាមួយ។ ដូចនេះវានឹងស្របទៅតាមច្បាប់ *Benford* នេះជាការពន្យល់ដ៏ល្អសម្រាប់សំណុំនៃពីរសំណុំ ប៉ុន្តែវាបានពន្យល់ពីក្រឡាផ្ទៃនៃប្រភេទចំនួនប្រជាជននៃប្រទេសនេះ ឬគួរតែប្រវែងស្របទៅតាមច្បាប់ *Benford* យើងនឹងពិភាក្សានៃការពន្យល់ថ្មីនៅឆ្នាំ 2008 សម្រាប់ករណីនេះផ្តល់ដោយ *Gauvrit, Delahaye, Fewster*។ ការពិភាក្សារបស់ពួកគេ គឺយកជាការបានសម្រាប់សំណុំចំនួនធំដែលយកមកពីឫស។

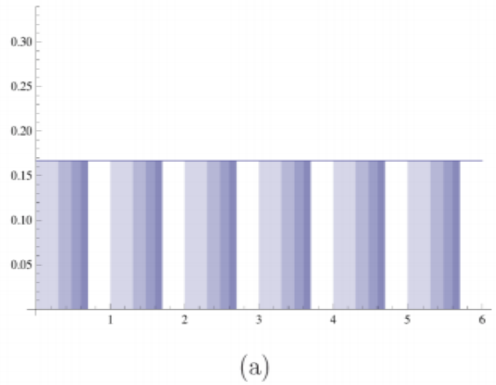
៤. ការលាតត្រដាងសំណុំនៃចំនួនលើសពីលំដាប់ពីរ ឬមីនៃទំហំ តាមច្បាប់ *Benford*

យើងនឹងធ្វើនៅក្នុងគោល 10 ហើយយើងមានចំនួនវិជ្ជមាន x ដែលអាចសរសេរ $X=m\in 10^{n}$ ដែល $m\in[1,10^{6})$ ហើយ $n\in\mathbb{Z}$ យើងរៀប n នៃទំហំ ហើយយើងនិយាយពីតំរៀបទំហំ ប្រសិនបើមានតំលៃ n ឬសម្រាប់សុំណុំនៃចំនួន (ចំណាំថា លក្ខណៈនេះគឺមិនប្រែប្រួលក្រោមការផ្លាស់ប្តូរនៃមាត្រដ្ឋានទេ) សម្រាយការពន្យល់គោលបំណងនៃចំនួនផ្តេក $[1,10^{6})$ ។ បន្ទាប់មក ជាមួយនឹងលេខ 1 នៅក្នុងសំណុំពី 1 ទៅ 9 មានតែមួយ

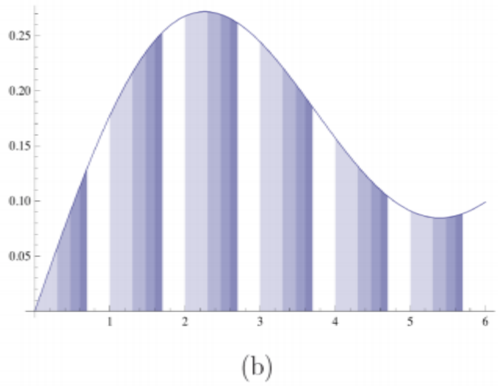
$S_1=[1,2)\cup[10,20)\cup[100,200)\cup[1000,2000)\cup[10^4,2.10^4)\cup[10^5,2.10^5)$ ហើយ សំនុំ S_1 ជាមួយនឹងតម្លៃពី 0 ទៅ 9 ផ្សេងទៀត វាត្រូវផ្លាស់តាមលោការីតគោល 8 នៃចំនួនដែលមាន $Y=\log_{10}x$ ហើយ $Y=\log_{10}m+n$ ឲ្យបង្ហាញថា អថេរចៃដន្យ M លើចន្លោះ $[1,10)$ គោរពតាមច្បាប់ *Benford* ហើយអថេរចៃដន្យ $Z=\log_{10}M$ ជាទម្រង់ងាយលើចន្លោះ $[0,1)$។ ដូច្នេះ វាគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់បង្ហាញថាការបែងចែកនៃអនុគមន៍ គឺជាទម្រង់ងាយរបស់តំលៃនៅលើចន្លោះ $[0,1)$ ពិតនៅពេលដែល $P(Z\le z)=P(0\le\log_{10}M\le z)=P\left(1\le M\le 10^z\right)=\log_{10}10^z=z$ ប្រសិនបើ X ស្ថិតក្នុងសំណុំ S_1 ហើយ Y ស្ថិតក្នុងសំណុំ $T_1=\log_{10}S_1$

$$T_1=[0,\log_{10}2)\cup[1,1+\log_{10}2)\cup[2,2+\log_{10}2)\cup[3,3+\log_{10}2)\cup[4,4+\log_{10}2)\cup[5,5+\log_{10}2)$$

ហើយស្រដៀងទៅនឹងតួលេខដទៃទៀត ដោយការជឿជាក់ថាការយកលេខដោយចៃដន្យនៅក្នុងសំណុំនីមួយៗគឺជាអថេរចៃដន្យ X ដែលយកតម្លៃនៅក្នុងចន្លោះ $[1,10^6)$។ បន្ទាប់មក $Y=\log_{10}X$ គេយកតម្លៃក្នុងចន្លោះ $[0,6)$។ គេចងចាំថា អថេរចៃដន្យខ្លះ គឺស្ថិតក្នុងសំណុំដទៃទៀតដែលជាសមីការផ្ទៃនៅលើក្រាហ្វិកនៃអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេដែលក្រៅពីសំណុំនេះ ប្រសិនបើអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ f នៃ Y ស្ថិតនៅក្រៅចន្លោះ $[0,6)$ គឺដូចគ្នានឹងរូបភាព 3 (*a*) ហើយយើងនឹងទទួលបានលទ្ធផលល្អ។ ជារឿយៗ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏វានៅតែច្រើនជាងគេដែរ។ វានឹងមិនអាចកើតឡើងដូចរូបភាព 3(*b*) ទេ ប៉ុន្តែ វាមានសារៈសំខាន់ ជាសំណុំដើមនៃចំនួនដែលបានលាតត្រដាងលើសពីលំដាប់មួយចំនួននៃទំហំ ចំនែកភាពខុសគ្នាដែលមានលក្ខណៈស្រដៀងគ្នាទៅនឹងការឲ្យ ជាលើកដំបូងដែលទទួលបានជោគជ័យគឺចំនួន i ដែលស្រប ហើយលើសពីកន្លះរង្វង់។ ផលបូកប្រវែងទាំងនោះជាលំដាប់នៃ $\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{i}\right)$ នៃប្រវែងទទឹងសរុប។ ដូច្នេះ វាមានភាពស្មើគ្នា ប្រសិនបើអនុគមន៍ *f(x)* វាមិនដូចទៅនឹងកន្លះរង្វង់ដទៃទៀត។ វាមានមួយក្នុងចំណោមទាំងនោះ ដែលអាចសង្ឃឹមថានឹងមានកម្ពស់ដូចគ្នាទៅនឹងលំដាប់នៃទំហំសម្រាប់ភាពខុសគ្នានៃតួលេខ។ នៅពេលដែលវាកើតឡើង នោះទិន្នន័យទៅតាមច្បាប់លោក *Benford*

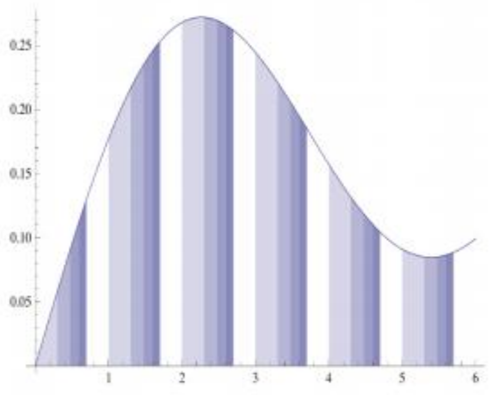


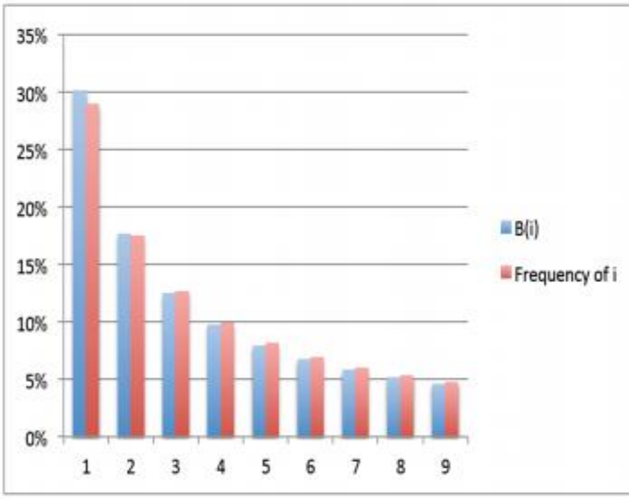
(a) អនុគមន៍ដងស៊ីតេ f ដូចៗគ្នា



(b) អនុគមន៍ដងស៊ីតេ f មិនដូចគ្នា

រូបភាព 3: ផ្ទៃត្រូវគ្នាទៅនឹងប្រេកង់នៃតួសំខាន់ដំបូង $1,2,3,4$ ចំពោះអនុគមន៍ដងស៊ីតេពីរខុសគ្នានៃ Y។ តម្លៃត្រូវគ្នានៃផ្ទៃគឺស្ថិតនៅក្នុងរូបភាពទី 4





(a) អនុគមន៍ *Density* នៃ f

(b) ផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោង ជាតួលេខដ៏សំខាន់នៃ f ហើយចំពោះ អនុគមន៍ឯកសណ្ឋានដូចរូបទី៤។ ផ្ទៃក្រឡាផ្សៀងផ្ទាត់ទៅនឹងប្រេកង់ នៃតួលេខដំបូង $1, 2, 3$ និង 4 សម្រាប់អនុគមន៍ *Density* នៃរូប $3(b)$ នៅខាងស្តាំយើងឃើញតម្លៃទាំងនេះស្អាត ហើយជិតទៅនឹងទំនាក់ទំនង ទាំងនោះដោយច្បាប់របស់ *Benford* ក្នុងករណីនៃអនុគមន៍ *Density* ឯកសណ្ឋានចំពោះ y ។

៥. យើងអាចសាកល្បងដោយវិធីណា បើសំណុំនៃលេខ តាមច្បាប់របស់ *Benford* ?

បើយើងធ្លាប់បានរៀនមុខវិជ្ជាស្ថិតិ ហើយនោះអ្នកនឹងបានរៀននូវ $X^2 goodness-of-fit\,test$ ។ ការសាកល្បងនេះ អនុញ្ញាតអោយអ្នកពិនិត្យថា ទិន្នន័យមួយចំនួនតាមដោយរបាយនៃប្រូបាប៊ីលីតេដែរឬអត់។ ឧបមាថា អ្នកចង់បង្កើតការសាល្បងមួយជាមួយសំណុំនៃធាតុ n មួយ។ អ្នកគ្រាន់តែ បង្កើតនូវតារាងមួយដែល n_i បង្ហាញពីចំនួនលេខក្នុងសំណុំដែលអ្នកបានជ្រើសរើសជាលើកដំបូង i ដែលជាការពិតណាស់ $n = n_1 + ... + n_9$ ។ N_i បង្ហាញនូវចំនួននៃចំនួន ដែលគួរតែមានផ្ទុកនៅតួលេខដំបូងគេ i ។ បើសំណុំរបស់អ្នកបានតាមដោយច្បាប់ *Benford* នោះគេកំណត់វាដោយ $N_i = nB(i)$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9
N_i	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9

តារាង 2: *The table for the x^2 goodness-of-fit test.*

បន្ទាប់មកគណនា $x^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{(n_i - N_i)^2}{N_i}$ ហើយមើលតារាងតម្លៃនៃ x^2 ត្រង់បន្ទាត់ដែលត្រូវទៅនឹង 8 ដឺក្រេ។ ប្រសិនបើអ្នកជ្រើសរើសយកការតេស្តដោយ 5% ដែលខុចនោះ អ្នកនឹងទទួលយកនូវទិន្នន័យដែលត្រូវនឹងច្បាប់ *Benford* ដែរ ប្រសិនបើ $x^2 < 15.51$ ហើយបដិសេធន៍ចោលនូវករណីផ្សេងទៀត។ នេះជារូបមន្តដ៏រហ័ស ប៉ុន្តែ

បើសិនជាអ្នកគ្រាន់តែធ្វើតេស្តជាមួយសិស្សរបស់អ្នក នោះអ្នកគ្រាន់តែចំណាយពេលវេលាថែមទៀតដើម្បីអោយកាន់តែច្បាស់នូវសេចក្តីលំអិតនៃតេស្ត និងអត្ថន័យរបស់វា 6 ភាពមិនប្រែប្រួលនៃច្បាប់របស់ *Benford* ក្នុងការប្រែប្រួលនូវគោលនេះអាចជាគំរូដូចទៅនឹងភាព មិនប្រែប្រួលក្នុងការប្រែប្រួលនូវខ្នាតដែរ។ វាត្រូវការល្បិចក្នុងការគិតព្រោះយើងមិនអាចកំណត់នូវដែនកំណត់នៃកិច្ចការរបស់យើងទាក់ទងទៅនឹងផ្នែកមួយនៃអាល់ការីត។ ជាការពិតណាស់បើ $x = m10^n$ នោះផ្នែកនៃ 10^n ក៏ចាំបាច់បំប្លែងទៅក្នុងគោលថ្មីផងដែរ ហើយជាការពិតណាស់ភាពលំបាកពិតប្រាកដ គឺការបង្ហាញតាមន័យគណិតវិទ្យា។

៧. ការសន្និដ្ឋាន

ច្បាប់របស់លោក *Benford* គឺដាក់នូវដំណោះស្រាយដោយមិនបានពិចារណា ចំពោះបញ្ហាអ្វីមួយដែលយើងអាចយកមកធ្វើកាពិសោធន៍ដោយខ្លួនឯង ហើយបញ្ហាទាំងអស់នោះប្រែប្រួលទៅតាមកាពិចារណា។ យើងអាចប្រើវាតាមតម្រូវការដែលយើងចង់ដឹង ប៉ុន្តែគ្មានលក្ខណៈស្តង់ដាទេ។ ជាកាពិតណាស់បញ្ហានិងកំហុសឆ្គងតែងតែកើតមាន ប៉ុន្តែសម្រាប់ការចំណាយពេលវាជាសញ្ញាដំបូងនៃតួលេខ លក្ខណៈពិសេសរបស់ច្បាប់ *Benford* គឺបានអនុញ្ញាតឲ្យប្រើក្នុងការបំបែកច្បាប់ *second significant digit* និង *third significant digit* -ល-។ យើងស្វែងរកវាដោយខ្លួនឯងត្រូវតែគិតក្នុងប្រជុំចន្លោះបណ្តុំសេសនៃចំនួនពិតដែលយើងតែងតែធ្វើវានៅក្នុងទ្រឹស្តីទី *second significant digit* គឺ i ៕