អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ស៊ីត *Goodstein*

ការសិក្សាពីការវិវត្តន៍នៃបាតុភូតធម្មជាតិ តែងតែនាំយើងឲ្យសិក្សាពីស៊ីតនៃចំនួនពិត ជាពិសេស លក្ខណៈរបស់ស៊ីត និងភាពរួមរបស់វា។ ស៊ីតនៃពហុធា ស៊ីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ស៊ីតនៃអនុគមន៍លោការីតត្រូវបានគេជួបប្រទះជាញឹកញាប់ នៅមធ្យមសិក្សា។ ប៉ុន្តែមានស៊ីតដទៃទៀតដែលនិយមន័យរបស់វាសាមញ្ញ ប៉ុន្តែវាបង្កប់នូវលក្ខណៈស្មុគស្មាញជាច្រើន។ ឧទាហរណ៍ ស៊ីត *chaotic* ដែលតែងតែកើតមានក្នុងការសិក្សានៃប្រព័ន្ធឌីណាមិច ហើយស៊ីត *Syracuse* (ឬស៊ីតដែលមានតួទី n គឺ $3n+1$) ដែលត្រូវបានណែនាំដោយលោក *Luther collatz* ក្នុងឆ្នាំ១៩៣៧។ ស៊ីត *Syracuse* ត្រូវបានធ្វើការពិភាក្សាអស់ជាច្រើនទសវត្សរ៍មកហើយ។ ថ្វីបើ តំលៃធំៗនៃតួរបស់ស៊ីតនេះត្រូវបានគេគណនាក៏ដោយ ក៏វានៅតែគ្មាននរណាដឹងថា តើវាជាស៊ីតមិនកំណត់ ឬស៊ីតកំណត់ ហើយតួរបស់វាតែងតែបញ្ចប់ដោយលេខ1។

ស៊ីតដែលត្រូវបានគេសិក្សាក្នុងអត្ថបទនេះ ត្រូវបានណែនាំដោយលោក *British Logician R.L. Goodstein* ក្នុងឆ្នាំ ១៩៤៤ ហើយវាបង្ហាញអំពីប្រភេទផ្សេងៗនៃលក្ខណៈមិនធម្មតាជាច្រើន។ តួដំបូងនៃស៊ីតនេះកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងដែលយើងមានជំនឿថាវានឹងខិតទៅរកអនន្ត ផ្ទុយទៅវិញមានការភ្ញាក់ផ្អើលយ៉ាងខ្លាំង ព្រោះថាចុងបញ្ចប់នៃស៊ីតនេះគឺធ្លាក់ចុះ ហើយទីបញ្ចប់វាខិតទៅរកសូន្យទៅវិញ។ ដើម្បីបង្ហាញលទ្ធផលនេះ យើងត្រូវដឹងពីភាពទូទៅ នៃគោលការណ៍ *well-ordering* សម្រាប់ចំនួនគត់ *(Transfinite number)*។

ប៉ុន្តែគោលគំនិតដំបូងនៃការសិក្សាស៊ីតនេះវាមិនពិបាកយល់នោះទេ ដូចជាការបង្ហាញរបស់លោក *Hudgson* ដែលបានពន្យល់ពីស៊ីតមួយ ហើយត្រូវបានគេដាក់ឈ្មោះថាស៊ីត *Weak Goodstein* ដែលមានលក្ខណៈធម្មតា តែមានទំនាក់ទំនងយ៉ាងជិតស្និទ្ធទៅនឹងស៊ីត *Goodstein*។

១. ស៊ីត *Weak Goodstein*

លោក *Hodgson* បានពន្យល់ពីនិយមន័យនៃស៊ីត *Weak Goodstein* ដែលចាប់ផ្តើមដោយយកចំនួន 266 ជាតួដំបូង ដូចជាចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ វាត្រូវបានបំបែកឲ្យទៅជាផលបូកនៃស្វ័យគុណគោល 2 ដោយដឹងថា $266=2^8+2^3+2^1$ ស៊ីត *Weak Goodstein* ចាប់ផ្តើមដោយតួដំបូង $u_0=266$ ត្រូវបានគេកំណត់ដូចតទៅ u_1 បានមកពីការចម្លងគោល 2 ដែលប្រើដើម្បីសរសេរ u_0 ប៉ុន្តែត្រូវប្តូរគោល 2 ទៅជាគោល 3 ហើយដក 1។ យើងសរសេរ ឡើងវិញនូវលទ្ធផលក្នុងគោល 3 ដូចនេះ: $u_1=3^8+3^3+3^1-1=3^8+3^3+2=6590$ ។ យើងបន្តជំនួសតួនៃស៊ីតដោយចំនួនគត់ធម្មជាតិនៃគោលក្នុងតួមុន ដោយចំនួនគត់ធម្មជាតិបន្ទាប់ ហើយដក 1។
គេទទួលបានដូចតទៅ៖

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 2^8+2^3+2^1=266\\
u_1 &= 3^8+3^3+3^1-1=3^8+3^3+2=6,590\\
u_2 &= 4^8+4^3+2-1=4^8+4^3+1=65,601\\
u_3 &= 5^8+5^3+1-1=5^8+5^3=390,750\\
u_4 &= 6^8+6^3-1=6^8+5.6^2+6^2-1=6^8+5.6^2+5.6+6-1\\
&= 6^8+5.6^2+5.6^1+5=1,679,831\\
u_5 &= 7^8+5.7^2+5.7^1+5-1=7^8+5.7^2+5.7^1+4=5,765,085\\
u_6 &= 8^8+5.8^2+5.8^1+4-1=8^8+5.8^2+5.8^1+3=16,777,579\\
u_7 &= 9^8+5.9^2+5.9^1+3-1=9^8+5.9^2+5.9^1+2=43,047,173\\
u_8 &= 10^8+5.10^2+5.10^1+2-1=10^8+5.10^2+5.10^1+1=100,000,551\\
u_9 &= 11^8+5.11^2+5.11^1+1-1=11^8+5.11^2+5.11^1=214,359,541\\
u_{10} &= 12^8+5.12^2+5.12^1-1=12^8+5.12^2+4.12^1+12-1\\
&= 12^8+5.12^2+4.12^1+11=429,982,475
\end{aligned}
$$

តារាង **1**: ធាតុដំបូងនៃស្វ៊ីត ***Weak Goodstein***

ដូចដែលអ្នកបានឃើញនូវតួទាំងឡាយនៃស្វ៊ីត ***Weak Goodstein*** វាកើនឡើងយ៉ាងលឿនទៅរកតម្លៃដ៏ធំដូច្នេះ ប្រហែលជាអ្នកគិតថាស្វ៊ីតទាំងនេះនៅតែបន្តការកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងទៀត។ ប៉ុន្តែវាមិនអញ្ចឹងទេ។ ឧទាហរណ៍៖ ប្រសិនបើយើងជំនួស $u_0=1$ នោះ $u_1=1-1=0$ ប្រសិនបើ $u_0=2=2^1$ នោះ $u_1=3^1-1=2, u_2=2-1=1$ ហើយ $u_3=1-1=0$ (ព្រោះគោលនៃ u_2 គឺ 4 ហើយគោលនៃ u_3 គឺ 5)។ អ្នកអាចពិនិត្យមើលនូវភាពដូចគ្នាផ្សេងទៀតផងដែរ ប្រសិនបើ $u_0=3$ នោះតួនៃស្វ៊ីតនេះមិនអាចធំជាង 3 បានទេ ហើយវាថែមទាំងខិតទៅរក 0 នៅជំហានទី 5។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ នៅពេលបំបែកតួដំបូងមានស្វ័យគុណនៃ 2 លើសពី 2^1 នោះតួនៃស្វ៊ីតកើនឡើងយ៉ាងឆាប់រហ័ស (ដូចបានពន្យល់នូវ $u_0=266$) ដែលយើងមានជំនឿថាស្វ៊ីតនេះ ខិតទៅរកអនន្ត។ តើការដក 1 នៃគ្រប់ជំហានអាចកាត់បន្ថយយ៉ាងណា ដល់ការកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងនៃតួស្វ៊ីត តាមរយៈការបន្ថែមតម្លៃពីគោលមួយទៅគោលមួយទៀត?

ផ្ទុយពីនេះ ចូរពិនិត្យមើលយ៉ាងប្រុងប្រយ័ត្ននូវការបង្ហាញតាមតារាង ខាងលើ។ ថ្វីបើតួបន្តបន្ទាប់នៃស្វ៊ីត (ដែលតួទីមួយស្មើ 266) កើនឡើងយ៉ាងឆាប់រហ័សក៏ដោយ ក៏ស្វ័យគុណនៃគោលបន្តបន្ទាប់ឈានទៅរកការធ្លាក់ចុះ។ ជាឧទាហរណ៍ ស្វ័យគុណ 1 ក្នុង u_0 វាមិនមានវត្តមានក្នុង u_1 ទេ។ ប្រហាក់ប្រហែលនឹងស្វ័យគុណ 3 នៃ u_3 គឺត្រូវបានជំនួសដោយ 2 ក្នុង u_4។ នៅទីបញ្ចប់ស្វ័យគុណ 8 ក្នុង u_{10} បានរួមទៅរក 7 ហើយ 7 បន្តធ្លាក់ចុះបន្ថែមទៀត។ នេះជាលក្ខណៈរួមនៃស្វ៊ីត *Goodstein*។ ទាំងអស់នេះដែលនឹងអនុញ្ញាតឲ្យយើងបង្ហាញថាស្វ៊ីតនេះរួមទៅរកសូន្យ។ ដើម្បីឲ្យកាន់តែច្បាស់ យើងត្រូវសិក្សាពីស្វ៊ីតដែលមានតួជា *transfinite ordinal number*។

២. ***Transfinite ordinal number និង well ordering***

Ordinal:

នៅក្នុងន័យសាមញ្ញ ចំនួន *ordinal* ត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្ហាញលំដាប់ (ទីតាំង)៖ ទី១ ទី២ ទី៣…… ។ល។ តាមពិតចំនួនគត់ធម្មជាតិវិជ្ជមានត្រូវបានគេប្រើដើម្បីរៀបចំធាតុនៃសំណុំកំណត់ណាមួយនៅក្នុងមធ្យោបាយនេះ។

ការសិក្សា *transfinite ordinal number* ជាវិបាកដែលបានមកពីការសិក្សា *ordinal number*។ *Georg Cunter* ជាអ្នកដែលបានចងក្រងអត្ថបទស្តីពី *Transfinite ordinal cunter* នៅចុងសតវត្សទី ១៩។ ដោយហេតុថាសំណុំនៃចំនួនគត់គឺជា សំណុំកំណត់។ ឧបមាថាមានចំនួន ω ដែលធំជាងគេបង្អស់នៃគ្រប់ចំនួនគត់។ ព្រោះចំនួនគត់ជាច្រើនដែលមិនអាចកំណត់បាន គឺតូចជាងចំនួន ω។ យើងហៅថា *transfinite ordinal number* វាមានចំនួនបន្តបន្ទាប់គឺ $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$ ហើយមានច្រើនបន្តទៀត។ ចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាងគេ ប៉ុន្តែវាធំជាងចំនួនលំដាប់ $\omega+n$ គឺ $\omega+\omega$ ឬ $\omega.2$ ហើយចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាងគេ ប៉ុន្តែវាធំជាងចំនួនលំដាប់ $\omega.n+m$ (ដែល m គឺជាចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាង $\omega.n$) គឺ ω^2។ ចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាងគេ ប៉ុន្តែវាធំជាងចំនួនលំដាប់ ω^n+m (ដែល m គឺជាចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាង ω^n) គឺ ω^ω

$$\begin{array}{cc}
0,1,2,\ldots,n\ldots & \omega \\
\omega+1,\omega+2,\ldots,\omega+n\ldots & \omega.2 \\
\omega.2+1,\omega.2+2,\ldots,\omega.2+n\ldots & \omega.3 \\
\omega.3+1,\omega.4,\ldots,\omega.n\ldots & \omega^2 \\
\omega^2+1,\ldots,\omega^3,\ldots,\omega^n\ldots & \omega^\omega
\end{array}$$

ដែល ω^ω គឺត្រូវបានសរសេរដោយយ $\omega^\omega+1, \omega^\omega+2, \ldots, \omega^{2\omega}, \omega^{2\omega}+1, \ldots, \omega^{2\omega}+\omega, \ldots, \omega^{3\omega}, \ldots, \omega^{\omega^\omega}$ ហើយគេអាចកំណត់បាន ε_0 ដែលចំនួនលំដាប់តូចជាងគេបំផុត ឲ្យធំជាងគេផលបូកទាំងអស់ដែលមានទំនាក់ទំនងនៃស្វ័យគុណ ω ហើយអាចបន្តដំណើរការគ្មានដែនកំណត់។ តាមពិតទៅ ចាប់ផ្តើមពីចំនួនលំដាប់បណ្តាក់ ព្រោះវាជាសំណុំរាប់បាន។ នោះគឺចំនួនលំដាប់អាចផ្គូរផ្គងពីមួយទៅមួយ ជាមួយនឹងចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

Ordinal and well ordering:

ភាពសំខាន់ខុសគ្នារវាងចំនួនលំដាប់ និងចំនួនគត់វិជ្ជមានគឺត្រង់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ 0 ហើយភ្លាមនោះមានចំនួនដែលគេឲ្យមុន ដែលជាហេតុមានចំនួនលំដាប់ដូចតទៅ ω, $\omega.2$ រហូតដល់ ω^{ω} ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏សំណុំចំនួនគត់ សំណុំពង្រីកនៃចំនួនលំដាប់គឺ *"wellordered"* នៅក្នុងការគិតដែលគ្រប់សំណុំមិនទទេនៃចំនួនលំដាប់មានធាតុមួយយ៉ាងតិច។ នេះជាកម្មសិទ្ធនៃលទ្ធផលនៃការស្រាវជ្រាវនូវរឿងពិតដែលមិនអាចកំណត់បាននូវភាពថយចុះយ៉ាងដាច់ខាតនៃស្វ៊ីត។ ឧបមាថា៖ មានស្វ៊ីតមិនកំណត់មួយនោះគេបាន $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ហើយ S ជាសំណុំនៃគ្រប់តួ។ គេឲ្យ S ជាសំណុំមិនទទេ វាមានធាតុមួយយ៉ាងតិចគឺ α^2 ហើយ $\alpha = u_k$ ដែល k ជាចំនួនគត់។ តែស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតចុះដាច់ខាត នោះ $u_{k+1} < u_k = \alpha$ ហើយ α គឺជាធាតុមួយយ៉ាងតិចរបស់ S ដែលគ្រាន់តែជាការសន្មត់បង្រួមប៉ុណ្ណោះ។ ឥឡូវនេះយើងអាចបង្ហាញពីរបៀបប្រើចំនួនលំដាប់ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ពីស្វ៊ីត *Weak Goodstein*។

២. យើងនឹងបង្ហាញថាស្វ៊ីត *weak Goodstein* រួមទៅរក 0

ដោយ u_n ជាស្វ៊ីត *Weak Goodstein*។ ដោយប្រើ u_n យើងនឹងបង្កើតស្វ៊ីតចុះ α_n នៃ *ordinal numbers* ថ្មីមួយ ដោយជំនួសគោលក្នុង u_n ដោយ ω។ ដោយគោលរបស់ u_0 គឺ 2 ហើយដោយគោលរបស់ u_n កើនពីតួមួយទៅតួមួយ នោះយើងត្រូវប្រើ $(n+2)$ ជាគោល ដើម្បីសរសេរ u_n ជាលក្ខណៈបំបែក។

ចូរមើលតារាង 2 ដែលនិយាយពីការបង្កើតស្វ៊ីត α_n ដែលមាន $u_0 = 266$

n	u_n	α_n
0	$2^8+2^3+2^1$	$\omega^8+\omega^3+\omega^1$
1	$3^8+3^3+3-1=3^8+3^3+2$	$\omega^8+\omega^3+2$
2	4^8+4^3+1	$\omega^8+\omega^3+1$
3	5^8+5^3	$\omega^8+\omega^3$
4	$6^8+6^3-1=6^8+5.6^2+5.6^1+5$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5+5$
5	$7^8+5.7^2+5.7^1+4$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5+4$
6	$8^8+5.8^2+5.8^1+3$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5+3$
...	...	...
9	$11^8+5.11^2+5.11^1$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5$
10	$12^8+5.12^2+4.12^1+11$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.4+11$
...	...	...

តារាង 2: ស៊ីតនៃចំនួនលំដាប់ដែលត្រូវគ្នានឹងស៊ីត *weak Goodstein*

តាមតារាងបង្ហាញថា គ្រប់តួនៃស៊ីត α_n ធំជាង ដែលត្រូវគ្នានៃស៊ីត u_n តែ u_n ជាស៊ីតកើន ហើយ α_n ជាស៊ីតចុះ។ តួរបស់ α_n ធំជាងតួរបស់ u_n ព្រោះនៅក្នុងការសរសេរជាលក្ខណៈបំបែកនៃ u_n ដោយប្រើគោល $(n+2)$ យើងមានតួឯកតា *(unit term)* នៅក្នុង u_n ស្មើ 0 ឬមិនស្មើ 0។ ដូចនេះដើម្បីសរសេរពី u_n ទៅ u_{n+1} យើងមានពីររបៀប៖

- តួឯកតារបស់ u_n មិនស្មើ 0 ដើម្បីសរសេរ u_{n+1} ដោយប្រើ u_n យើងត្រូវប្រើ “1” នោះតួឯកតារបស់ u_{n+1} តូចជាងតួឯកតារបស់ u_n មួយឯកតា (ក្នុងតារាង2 ករណីនេះកើនឡើងពី $u_1\to u_2,\, u_2\to u_3,\, u_4\to u_5,\, u_5\to u_6$)។
- តួឯកតាស្មើ 0 ក្នុងករណីនេះយើងអាចសរសេរការបំបែករបស់ u_n ដោយប្រើគោលថ្មីដោយធ្វើតាមពន្លាតដែលធ្វើឲ្យស្វ័យគុណធ្លាក់ចុះ។ (ក្នុងតារាង2 ករណីនេះកើនឡើងពី $u_0\to u_1,\, u_3\to u_4,\, u_9\to u_{10}$)។

ទាំងពីរករណី យើងឃើញថា α_n តូចជាង α_{n+1} គ្រប់តម្លៃ n។ ដោយ *ordinal number* ជាចំនួនដែលមានលំដាប់ នោះយើងមិនអាចមានស៊ីតនៃ *ordinal number* ដែលចុះដាច់ខាតមិនកំណត់ទេ។ ដូចនេះយើងមាន $m\in z*$ ដែល $\alpha_n=0$។ បន្ថែមលើសពីនេះទៀតដោយ $u_n\le\alpha_n$ គ្រប់ n នោះ u_m ត្រូវតែស្មើ 0។ ម្យ៉ាងទៀតតួរបស់ u_n ខិតទៅរក 0 ត្រឹមតែក្នុងករណី $\{0,1,2,3,4,...,n\}$ ជាសំណុំកំណត់ *(finite set)*។

<u>សំណួរ</u>: យើងចាប់អារម្មណ៍ $u_n<\alpha_n$ ដែលមាន $u_0=5$។ តើ $n=0$? និង $u_n=0$? ដើម្បីឲ្យ $\alpha_n=\omega$។ ចូរសរសេរតួនីមួយៗរបស់ u_n និង α_n រហូតដល់ n ដែល $\alpha_n=\omega$។

ជំហានបន្ទាប់យើងនឹងសិក្សាពីស៊ីត *Goodstein*។ និយមន័យរបស់ស៊ីតនេះ មានលក្ខណៈខុសបន្តិចពីស៊ីត *Weak Goodstein* តែការបង្ហាញភាពរួមមានលក្ខណៈស្រដៀងគ្នា។

៤. <u>ស៊ីត *Goodstein*</u>

ការពិចារណាម្តងទៀតនូវការជំនួសគោល 2 ដោយ $266: 2^8+2^3+2^1$។ ឥឡូវសរសេរស្វ័យគុណដោយប្រើតែគោល $2,\, 3=2^1+1,\, 8=2^3=2^{2+1}$។ ជាលទ្ធផល កន្សោមធាតុនៃចំនួន 266 គឺអាចសរសេរដោយគ្មានធាតុណាធំជាងគោល 2 ឡើយ។ តាង m_n ជាស៊ីត *Goodstein* ដែលចាប់ផ្តើមជាមួយលេខ $u_0=266$។ ផ្តើមពី m_1 ដោយប្តូរពីការជួសគោល 2 ទៅគោល 3 ហើយដក 1 និងសរសេរឡើងវិញនូវលទ្ធផលដែលគ្មានចំនួនណាធំជាងគោល 3 ឡើយ។ បន្តនូវដំណើរការច្រំដែលដើម្បីបាននូវតួបន្តបន្ទាប់នៃ m_n ដូចជាការបង្ហាញនូវក្នុងតារាង3:

$$m_0 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$$
$$m_1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$$
$$= 443426488243037769948249630619149892886 \approx 10^{38}$$
$$m_2 = 4^{4^{4+1}} + +4^{4+1} + 1 \approx 10^{616}$$
$$m_3 = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10921}$$
$$m_4 = 6^{6^{6+1}} + 6^{6+1} - 1 = 6^{6^{6+1}} + 5.6^6 + 5.6^5 + 5.6^4 + 5.6^3 + 5.6^2 + 5.6^1 + 5$$
$$\approx 10^{217832}$$
$$m_5 = 7^{7^{7+1}} + 5.7^7 + 5.7^5 + 5.7^4 + 5.7^3 + 5.7^2 + 5.7^1 + 4$$
$$\approx 10^{4871822}$$

តារាង 3

ដូចដែលអ្នកបានឃើញ ទំហំនៃការកើនឡើងនៃតួគឺយ៉ាងធំសម្បើម ហើយស៊ីតនេះមិនទាន់បញ្ចប់ទេដូចជាស៊ីត *Goodstein* ទាំងអស់ ជាយថាហេតុវាចាប់ផ្តើមថយចុះហើយចុងបញ្ចប់គឺរួមទៅរក 0។ ការស្រាយបញ្ជាក់នេះ វាប្រហាក់ប្រហែលទៅនឹងការស្រាយបញ្ជាក់នៃស៊ីត *Weak Goodstein*។ ដូចជាក្នុងករណីនេះស៊ីត β_n គឺភ្ជាប់ទំនាក់ទំនងទៅនឹងស៊ីត m_n ដោយការប្តូរគោលដែលយើងជួបប្រទះទៅ ω។ ពីរ ឬបីធាតុដំបូងនៃ β_n គឺមានទម្រង់ដូចតទៅ:

$$\beta_0 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega^1$$
$$\beta_1 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 2$$
$$\beta_2 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 1$$
$$\beta_3 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1}$$
$$\beta_4 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + 5.\omega^\omega + 5.\omega^5 + 5.\omega^4 + 5.\omega^3 + 5.\omega^2 + 5.\omega^1 + 5$$
$$\beta_5 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + 5.\omega^\omega + 5.\omega^5 + 5.\omega^4 + 5.\omega^3 + 5.\omega^2 + 5.\omega^1 + 4$$

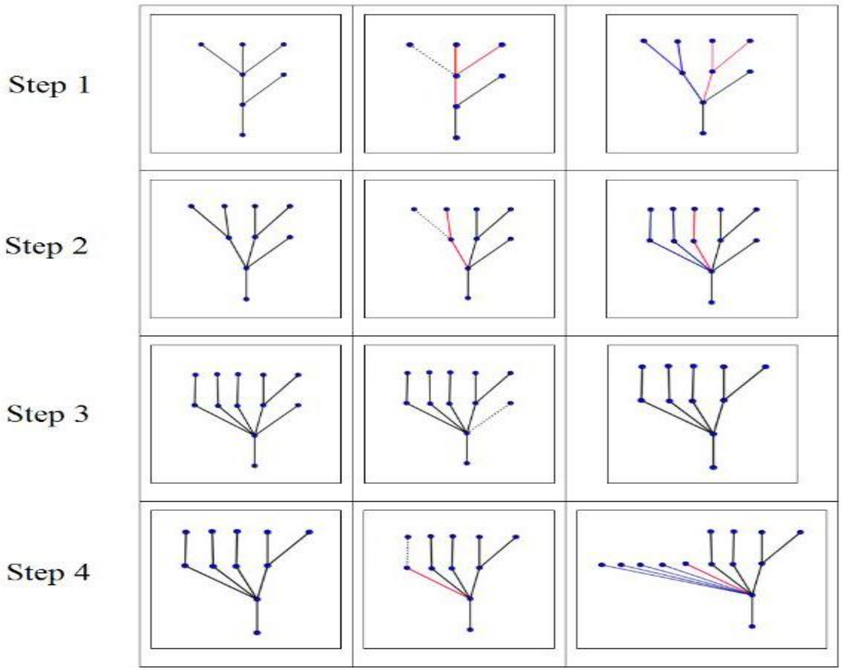
ស៊ីត β_n គឺជាចំនួនលំដាប់មានការចុះយ៉ាងដាច់ខាត ដែលការកំណត់នេះគឺមានធាតុតិចតួចណាស់ ហើយតួបន្តត្រូវបានគណនាយ៉ាងវែង ដោយគ្មានតួណាស្មើ 0 ទេ តែធាតុនៃស៊ីតនេះគឺ 0។ ប្រហាក់ប្រហែលទៅនឹងការពិចារណានេះអាចប្រើសម្រាប់ស៊ីត *Goodstein* ទាំងអស់។

តម្លៃលេខគណិតនៃចំនួនគត់លំដាប់ គឺត្រូវបានគេហៅថា *Peano arithmetic* ព្រោះក្នុងសតវត្សទី១៩ គណិតវិទ្យាជនជាតិអ៊ីតាលីឈ្មោះ *Giuseppe Peano* បង្កើតនូវរូបមន្តនៃស្វ័យសត្យដំបូងបង្អស់។ នេះជាអ្វីដែលយើងគួរកត់សម្គាល់អំពីការស្រាយបញ្ជាក់ដ៏ល្អប្រណិត ហើយផ្តល់អោយយើងនូវលទ្ធផលដោយ *Peano arithmetic* ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទដែលអាចអោយបាននូវកន្សោមធាតុផ្នែកខាងក្រៅនៃ *Peano arithmetic*។ ម្យ៉ាងទៀតវាប្រើទ្រឹស្តីទូទៅនៃសំណុំដែលរួមមានចំនួនលំដាប់ដើម្បីស្រាយនូវទ្រឹស្តីបទពីចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ មានន័យថាស៊ីត *Goodstein* រួមទៅរក 0។ នេះជាធម្មជាតិ សំណួរសួរថា តើការរួមនៃស៊ីត *Goodstein* អាចស្រាយដោយប្រើចំនួនលំដាប់ទេ។ ចម្លើយនេះគឺទេ។ សម្រាយបញ្ជាក់នៅឆ្នាំ១៩៨២ ប្រហែលជា ៤0ឆ្នាំកន្លងទៅ ស៊ីតនេះត្រូវបានគេរកឃើញដោយលោក *Laurie Kirby* និងលោក *Jeff Paris*។ ស៊ីតនេះត្រូវបានបង្ហាញថា ប្រសិនបើវារួមអាចស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើគោលការណ៍ *well-ordering* សំរាប់ចំនួនគត់ (មានបញ្ជាក់ដោយ *Peano arithmetic*)។ នោះទ្រឹស្តីបទអំពីស៊ីត *Goodstein* អាចកែតម្រូវដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ *Gentzen* ក្នុងឆ្នាំ១៩៣៦ ដែល *Peano arithmetic* ជាក់ប្រាកដក៏ត្រូវតែកែតម្រូវ។ ប៉ុន្តែយើងដឹងហើយថា ទ្រឹស្តីបទ *Gödel* *incompleteness* (១៩៣១) ដែលធ្វើអោយ *Peano arithmetic* មានភាពប្រាកដនិយម ដែលមិនអាចស្រាយបញ្ជាក់ដោយខ្លះ *Peano arithmetic* ទេ។ វាគឺជាអ្វីតិចតួចសម្រាប់អ្នកគណិតវិទ្យាមួយចំនួនដែលចំណាយថាមពលខ្លះខ្ជាយ ដើម្បីព្យាយាមស្វែងរកសម្រាយបញ្ជាក់ថ្មី។

ម្យ៉ាងវិញទៀត ដែលមានការភ្ញាក់ផ្អើលខ្លាំងនោះ តាមពិតទៅស៊ីត *Goodstein* គឺខិតទៅរក 0 ដែលអាចស្រាយបញ្ជាក់ដោយ *Peano arithmetic*។ ការពិចារណានេះ គឺមានសារៈសំខាន់ ដែលតួនៃស៊ីតមានទំនាក់ទំនងនៃចំនួនលំដាប់ គឺវាតិចតួចជាង ω^{ω}។ ការស្រាយបញ្ជាក់មួយ ដោយលោក *E.A Cichon* ដែលបានណែនាំពីស៊ីត *weak Goodstein* ក្នុងឆ្នាំ១៩៨៣។ ដែលតួនីមួយៗនៃស៊ីត *Goodstein* មួយអាចមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងសំណុំលំដាប់មាន m ធាតុនៃមេគុណនៃបំណែងចែកក្នុងគោល $n+2$ ដែលបានបង្ហាញថាសំណុំលំដាប់មាន m ធាតុដែលមានការចុះយ៉ាងដាច់ខាត ដែលធ្វើអោយអ្នករៀបចំសម្រាយបញ្ជាក់មានភាពស្ងប់ចិត្តបានល្អ។

៥. **<u>ស៊ីត *Goodstein* និងល្បែង *Hydra*</u>**

នៅក្នុងអត្ថបទ *Kirby* និង *Paris* បានបញ្ជាក់យ៉ាងច្បាស់ពីដំណើរការនៃល្បែង *Hydra* ជាមួយនឹងភាពប្រហាក់ប្រហែលនៃស៊ីត *Goodstein*។ ល្បែងនេះត្រូវបានដាក់ឈ្មោះពីការពណ៌នាពីរឿងទេវកថារបស់ក្រិចដែលបានរៀបរាប់ពីការប្រយុទ្ធតស៊ូរវាង *Hercules* និងសត្វដែលមានក្បាលច្រើនមានឈ្មោះថា *Learnaean Hydra* ដែលក្បាល *Hydra* ត្រូវបានកាត់នោះមានក្បាលពីរដុះចេញពីកន្លែងកាត់។ នៅក្នុងល្បែងនោះ *Hydra* គឺចេញដំណើរពីក្នុងព្រៃ ហើយក្បាលនៃ *Hydra* មានទំនាក់ទំនងទៅនឹងការបញ្ឈរចុងបញ្ចប់នៃស្លឹកឈើ ឬក៏ដើមឈើ។ ប្រសិនបើ *Hercules* កាត់ក្បាលមិនផ្ទាល់ ដែលភ្ជាប់ទៅនឹងមែកនៃដើមឈើ។ នៅពេលក្បាលត្រូវកាត់ផ្ដាច់ នោះ *Hydra* បានដុះក្បាលពីរចេញពីកន្លែងដែលកាត់ផ្ដាច់នោះ។ នេះត្រូវបានធ្វើអោយសម្រេចដោយមធ្យោបាយផ្សេងគ្នា ជំនួសដោយការពន្យល់នេះ។ សូមលើកឧទាហរណ៍ដោយ *Kirby* និង *Paris* ហើយប្រើប្រាស់ម្តងទៀតដោយលើកទ្រឹស្តី *Hodgson*។ ប្រសិនបើក្បាលត្រូវកាត់ផ្ដាច់នៅជំហានទី n នៃល្បែង នោះ *Hydra* ត្រូវមានក្បាល n ដែលចេញពីផ្នែកនៃចុងខាងលើនៃក្បាលត្រូវកាត់ផ្ដាច់។ ក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោមជាផ្នែកមួយនៃការកាត់ផ្ដាច់ គឺបង្ហាញដោយបន្ទាត់ចុចដែលជាផ្នែកមួយនៃទំនាក់ទំនងជាថ្មី ដូចការបង្ហាញខាងក្រោម៖



វាគឺមានលទ្ធភាពក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់នូវអ្វីដែលតួនៃរូបសណ្ឋាននៃក្បាល *Hydra* និងអ្វីជាយុទ្ធសាស្រ្តរបស់ *Hercules* ដែលបានប្រើ។ *Hercules* និងតែងតែជោគជ័យក្នុងការកាត់ផ្តាច់ក្បាល ទោះបីជាមានក្បាលថ្មីកើតឡើងដែលធ្វើអោយមានរយៈពេលយូរក្នុងការបញ្ចប់។ ដូចនេះភាពរួមរបស់ស៊ីុត *Goodstein* ដូចជាសម្រាយនៃគោលទៅលើទំនាក់ទំនងរវាងតួបន្តបន្ទាប់នៃមែកឈើ និងភាពចុះដាច់ខាតនៃស៊ីុតក្នុងចំនួនលំដាប់។ ដូចជាអ្នកបានទស្សន៍ទាយពីដ្យាក្រាមដែលបានបង្ហាញខាងលើ មែកឈើចេះតែដុះថ្មីជាបន្តបន្ទាប់ ប៉ុន្តែវាត្រូវកាត់ផ្តាច់ (ថយចុះ) បន្តបន្ទាប់ដែរ។ ចុងបញ្ចប់*Hercules* គឺនៅតែមានលទ្ធភាពកាត់ផ្តាច់ក្បាលដែលមានជីវិតនេះម្តងមួយៗដូចមែកឈើខាងលើនិងចំណុចនោះ (ដូចជាការពន្យល់ក្នុងជំហានទី3) គាត់នៅតែអាចកាត់ផ្តាច់ក្បាលម្តងមួយៗរហូតដល់គ្មានក្បាលណាកើតឡើងជាថ្មីឡើយ។

៦. មេរៀនដែលចេញពីឧទាហរណ៍

ឧទាហរណ៍ក្នុងអត្ថបទខ្លីនេះ គឺជាការចាប់អារម្មណ៍ពីការពិចារណាទូទៅ។ ដំបូងយើងបង្ហាញនូវគណិតតក្កវិទ្យាគឺមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យាខ្លាំង។ ទ្រឹស្តីបទជាច្រើនដូចជា ទ្រឹស្តីបទ *Gödel's incompleteness* និងគោលបំណងដូចចំនួនលំដាប់ គឺត្រូវការសិក្សាអំពីកម្មវត្ថុនៃចំនួនលំដាប់នៃគណិតវិទ្យា ដូចជាស៊ីុតនៃចំនួនគត់ និងមែកធាងនៃគណិតវិទ្យាតាមការបង្ហាញពីលក្ខណៈនៃចំនួនគត់អាចឲ្យយើងស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីទូទៅ តែមិនមែនសម្រាយបញ្ជាក់របស់ *Peano arithmetic* ទេ។ ឧទាហរណ៍៖ ដែលគូសបញ្ជាក់ពីសេចក្តីតាំងចិត្តខាងផ្នែកទ្រឹស្តីនិងភាសាវិទ្យាគម្រោងផ្នែកខាងក្នុង ដែលតែងជួបប្រទះនឹងការស្រាយបញ្ជាក់។ នៅក្នុងករណីនេះយើងសូមបង្ហាញនូវ *Peano arithmetic* គឺមានភាពទន់ខ្សោយជាងទ្រឹស្តីទូទៅនៃសំណុំ។

មេរៀនដទៃទៀតដែលបានមកពីឧទាហរណ៍នេះ គឺជាតម្លៃដែលខិតជិតទៅនឹងបញ្ហាផ្សេងគ្នាជាច្រើន (ភាពរួមនៃស៊ីុត *Goodstein* ទូទៅ) ដោយបញ្ជាក់ន័យវាទៅក្នុងការខិតទៅជិតមួយ (ភាពរួមនៃស៊ីុត *weak Goodstein*)។ នៅក្នុងសេចក្តីបន្ថែមឧទាហរណ៍ដែលបានបង្ហាញពីរបៀបនៃប្រភេទឧទាហរណ៍។ ស៊ីុតមួយដែលតួវាមានតម្លៃស្មើ 266 អាចពន្យល់ពីលក្ខណៈសំខាន់ទាំងអស់នៃប្រភេទករណីផ្សេងគ្នា។ ឧទាហរណ៍ដែលបានបង្ហាត់បង្ហាញពួកយើងអោយយល់ពីគំនិតអព្ភន្តរញ្ញាណមានដែនកំណត់។ ស៊ីុតដែលខិតជិតអនន្តតាមពិតទៅ វាមិនដូចនេះទេ ជាយថាហេតុពួកវាចុះ និងរួមទៅរកសូន្យនៅចំនួនកំណត់មួយនៃជំហាន។ ចុងបញ្ចប់ឧទារហណ៍ដែលអាចធ្វើអោយយើងបានឃើញទាំងស្វ័យគុណនិងបច្ចេកវិទ្យានៃដែនកំណត់ ព្រោះបច្ចេកវិទ្យាផ្តល់អោយយើងនូវការគិតយ៉ាងច្បាស់លាស់សម្រាប់ការកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងនៃតួនៃស៊ីុត។ ប៉ុន្តែវាមានដែនកំណត់ ជូនការជួបប្រទះចំនួនលេខក្នុងប្រភេទនៃនិយមន័យរបស់ស៊ីុត៕

ឯកសារយោង

[11] The terms of {mn} shown in Table 3 were computed using http://www.wolframalpha.com.

[12] Kirby, L. and Paris, J. (1982). Accessible Independence Results for Peano Arithmetic, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14, 285-293.

[13] Cichon, E. A. (1983). A Short Proof of Two Recently Discovered Independence Results Using Recursion Theoretic Methods, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**, 704-706.

[14] Bauer, A. Java applet for the Hydra Game. (If the applet fails to work in one browser, try it in another.) Dehornoy, P. (2001) L’infini est-il nécessaire? *Pour la Science*, Dossier, and Dehornoy, P. (2009) *Cantor et les infinis*.