អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

Map colouring and Gröbner Bases

រូបភាពនេះជាកម្មសិទ្ធិរបស់ mathscareers.org.uk ដែលជាអ្នកអនុញ្ញាតអោយប្រើប្រាស់ក្នុងការងារនេះ។ អ្នកនិពន្ធនេះបានចាប់កំណើតនៅក្នុងទីក្រុង *Marcelo Escuderio Hermandes*។ គាត់បានល្បីដោយ *"Four Colour Theorem"* យើងត្រូវការផាត់ពណ៌នៅលើផែនទីតែបួនពណ៌ប៉ុណ្ណោះ ដោយមិនដាក់ពណ៌ដូចគ្នា នៅជិតគ្នាទេ។ ការប្រើសមីការពហុធា និងមូលដ្ឋាន *Gröbner* យើងអាចកំណត់បានថាបើសិនជាមានតែបីពណ៌នោះក៏គ្រប់គ្រាន់ដែរសម្រាប់ដាក់ពណ៌លើផែនទីមួយដែរ ។

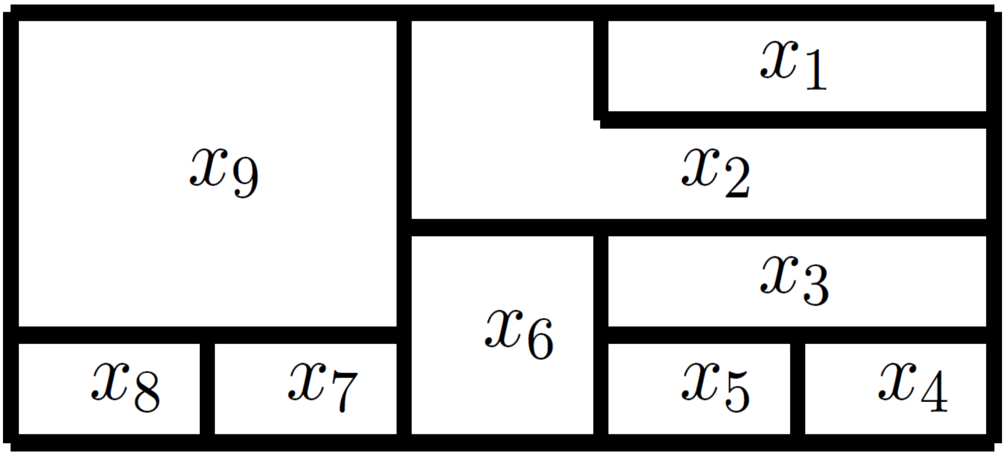
១ .ផែនទីពណ៌

ទ្រឹស្តីបទពណ៌ទាំងបួនដែលល្បីៗមាននៅក្នុងផែនទីទាំងមូល ទាំងនៅក្នុងប្លង់ឬនៅក្នុងស្វ៊ែរ អាចជាការដាក់ពណ៌ជាមួយនឹងពណ៌ទាំងបួន ដោយមានពណ៌ដូចគ្នាមិនស្ថិតនៅតំបន់ជិតៗគ្នា។ វាជាការងាយស្រួលណាស់ក្នុងការបង្កើតឧទាហរណ៍នៃផែនទីដែលមិនអាចដាក់តែបីពណ៌ ឬក៏ផ្សេងទៀតដែលអាចធ្វើបាន។ គេបានពិចារណាលើវិធីមួយ បើសិនជាមានតែបីពណ៌ នោះក៏គ្រប់គ្រាន់ដែរសម្រាប់ដាក់ពណ៌លើផែនទីមួយដែរ ហើយគេក៏អាចវិភាគលើការផ្គុំប្រព័ន្ធពហុធានៅលើផែនទី។ ពណ៌នីមួយៗ ត្រូវបានតាងដោយឯកតានៃឫសគូប ហើយតំបន់នីមួយៗតាងដោយអថេរ x_i ដូច្នេះគេអាចសន្មតថា តម្លៃមួយក្នុងចំណោមតម្លៃទាំងបី ក៏ដូចជា ពណ៌មួយក្នុងចំណោមពណ៌ទាំងបី ។ ដូចនេះយើងបានសមីការ $x_i^3-1=0$ សម្រាប់តំបន់នីមួយៗ សម្រាប់តំបន់ x_j និង x_k យើងមាន $0=x_j^3-x_k^3=\left(x_j-x_k\right)\left(x_j^2+x_jx_k+x_k^2\right)$។ បើសិន x_j និង x_k នៅតំបន់ជិតគ្នាតែបើតំបន់ជិតគ្នាមិនអាចមានពណ៌ដូចគ្នានោះ នាំអោយ $x_j \neq x_k$ ដូចនេះ នាំអោយ $x_j^2+x_jx_k+x_k^2=0$ ។ ក្នុងវិធីនេះ ផែនទីដែលមាន n តំបន់អាចមាន តែបីពណ៌ប៉ុណ្ណោះ នោះយើងមានប្រព័ន្ធសមីការពហុធា៖

$$\begin{cases} x_i^2-1=0 \\ x_j^2+x_jx_k+x_k^2=0 \end{cases}$$

ដែល $i=1,\ldots\ldots,n$ ហើយ x_j និង x_k តាងដោយតំបន់ដែលជាប់គ្នា រៀងគ្នា ហើយមានដំណោះស្រាយយ៉ាងហោចណាស់មួយ ។

យើងពិចារណាលើផែនទី:



រូបភាព 1

តើវាអាចមានតែបីពណ៌រឺ? ដើម្បីឆ្លើយនឹងសំនួរ យើងត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់លើប្រព័ន្ធពហុធា (1) ដោយ $i = 1, ..., 9$ ហើយយើងអាចដោះស្រាយបាន

$$(j, k) \in \{(1,2);(2,3);(2,6);(2,9);(3,4);(3,5);(3,6);(4,5);(5,6);(6,7);(6,9);(7,8);(7,9);(8,9)\}$$

២. ប្រព័ន្ធសមីការពហុធា

ចម្លើយនៃបញ្ហាជាច្រើននៅក្នុងគណិតវិទ្យាគឺជាដំណោះស្រាយនៃប្រព័ន្ធសមីការពហុធា ហើយវាមិនមែនជាការងាយស្រួលទេ។ បើសិន ជាប្រព័ន្ធដែលគេឲ្យជាសមីការលីនេអ៊ែរ យើងអាចដោះស្រាយតាមវិធី *Gaussian* ឬជំនួសដោយសមីការណាដែលសមមូលនឹងវា ហើយយើងអាច ងាយស្រួលក្នុងការដោះស្រាយ។ ក្នុងករណីដែលប្រព័ន្ធពហុធានោះវាមាន វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយដូចដែលយើងបានពណ៌នាខាងលើ។

យើងកំណត់សំណុំនៃពហុធាដោយ $P(n)$ ដែលដាក់វាជាកត្តារួមជា មួយអញ្ញាត $x_1, ..., x_n$ ។ គេឲ្យ $f_1, ..., f_r$ ជាសំណុំពហុធាក្នុងសំណុំ $P(n)$ ។ នោះយើងកំណត់បានដោយៈ

$$I = \langle f_1, ..., f_r \rangle = \{h_1 f_1 + ... + h_r f_r \mid h_1, ..., h_r \in P(n)\}$$

ដោយមានទ្រឹស្តីបទមួយរបស់អ្នកគណិតវិទ្យា *David Hilbert (2)* ដែលហៅថាទ្រឹស្តីបទ *Hilbert's Nuullstenatx* បាននិយាយថា ប្រព័ន្ធពហុធានៃ $f_1 = ... = f_r = 0$ អាចមានដំណោះស្រាយ លុះត្រាតែ $1 \notin \langle f_1, ..., f_r \rangle$ ប៉ុន្តែតើយើងអាចត្រួតពិនិត្យលក្ខខណ្ឌយ៉ាងដូចម្តេច?

ប្រព័ន្ធសមីការទាំងពីរវាពិតជាងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ $f_1 = ... = f_r = 0$ និង $g_1 = ... = g_s = 0$ ដែល $f_i, g_j \in P(n)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ (2) $\langle f_1, ..., f_r \rangle = \langle g_1, ..., g_s \rangle$ ដែលមានដំណោះស្រាយដូចគ្នា។

ហេតុដូច្នេះយុទ្ធសាស្រ្តក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែល $f_1 = ... = f_r = 0$ នោះគេក៏អាចរកពហុធា $g_1, ..., g_s$ បានដែរ ដែលបានបំពេញលក្ខខណ្ឌ (2) ហើយវាពិតជាអាចសាកល្បងបានបើសិនជាគេអោយ $f \in P(n)$ ប៉ុន្តែ $\langle f_1, ..., f_r \rangle$ មិនមែនសុទ្ធតែជារបស់ $P(n)$ នោះទេ និងដំណោះស្រាយជារួម គឺជាការងាយស្រួលណាស់ក្នុងការគណនាជាងប្រព័ន្ធសមីការដើម ។

ដូចគ្នាដែរ ដែល $G=\{g_1,......,g_s\}$ ត្រូវបានគេរកតាមរយៈទ្រឹស្តីបទមួយក្នុងកំឡុងពេលចុងពាក់កណ្តាលសតវត្សទី១ដោយអ្នកគណិតវិទ្យា *Wolfgang Gröbner* រយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំក្រោយមក សិស្សរបស់គាត់ *Bruno Bucherger* បានបង្កើត ទ្រឹស្តីបទអាល់ការីតមួយដើម្បីគណនាវា ។ ការបង្កើតទាំងនេះ ត្រូវបានគេហៅថា មូលដ្ឋានគ្រឹះ *Gröbner* និងទ្រឹស្តីបទអាល់ការីតរបស់ *Buchberger* ដើម្បីគណនា វាជាទ្រឹស្តីបទមួយដ៏សំខាន់ក្នុងការគណនាពិជគណិត។

បើសិនជាឧទាហរណ៍មានទម្រង់ $I=\langle f_1\rangle$ យើងមាន $f\in I$ លុះត្រាតែ $f=h_1f_1$ ដែល f ចែកដាច់ដោយ f_1។ ប្រៀបធៀប បើ $f\in\langle f_1,......,f_r\rangle$ លុះត្រាតែ $f=h_1f_1+......+h_rf_r$ តាមលក្ខណៈខាងលើ មានភាពស្រដៀងសម្រាប់ការចែក f ដោយ $f_1,......,f_r$ ។ ការពិតយើងអាចចែកពហុធាជាមួយអថេរមួយចំនួន ដោយសំណុំកំណត់នៃពហុធាទាំងមូល បន្ទាប់មកឯកធាត្រូវបានគេរៀបតាមលំដាប់។

៣. មូលដ្ឋានគ្រឹះ Gröbner

ឯកធា m មួយនៃ $P(n)$ មានធាតុជាទម្រង់ $x_1^{a_1}......x_n^{a_n}$ ដែល $a_1,......,a_n$ ជាចំនួនគត់។ ឯកធា $x_1^0......x_n^0$ បានកំណត់ដោយ (1) ។ ក្នុងចំណោមឯកធានៃសំណុំ $P(n)$ ត្រូវបានគេរៀបតាមលំដាប់តូចជាងឬស្មើ ដែលមានមួយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $1\le m$ និង $m_1.m\le m_2.m$ កាលណា $m_1\le m_2$ នោះគេអាចយកវាទៅអនុវត្តក្នុងការចែកអាល់ការីត ។

ក្នុងឧទាហរណ៍ ជាការរៀបតាមលំដាប់សទ្ធានុក្រម $\le_{Lex}$ ដែល $x_1^{a_1}......x_n^{a_n}\le_{Lex}x_1^{b_1}......x_n^{b_n}$ បើសិនជាមាន $1\le i\le n$ ដូចនេះ $a_i<b_i$ និង $a_j<b_j$ ដែល $i<j$ បើសិនជាលំដាប់នៃឯកធាមិនប្រែប្រួល នោះឯកធាធំបំផុតនៃពហុធា f វាត្រូវបានគេហៅថាកន្សោមគោលនៃ f ហើយកំណត់សរសេរដោយ $Lt(f)$។

មូលដ្ឋានគ្រឹះ *Gröbner* បានគិតថា $I=\langle f_1,......,f_r\rangle$ ជាមួយនឹងការឲ្យលំដាប់ឯកធាតាមនិយមន័យគ្រប់សំណុំ $G=\{g_1,......,g_s\}$ ជាធាតុរបស់ I ដែលកន្សោមគោលគ្រប់ធាតុនៃសំណុំ I ចែកដាច់និងកន្សោមគោលនៃធាតុមួយចំនួនរបស់សំណុំ G ។ យើងអាចបង្ហាញថាគ្រប់មូលដ្ឋាន *Gröbner* G នៃ I ជាសំណុំដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (2)។

ដូច្នេះ $1\in I$ លុះត្រាតែមានមូលដ្ឋាន *Gröbner* នៃសំណុំ I មានធាតុមិនសូន្យ នោះ $1\le m$ សម្រាប់គ្រប់ឯកធា m នៃ $P(n)$។

ឧទាហរណ៍ $G=\{f_1\}$ ជាមូលដ្ឋាន *Gröbner* នៃ $\langle f_1\rangle$ ជាមួយនឹងគ្រប់លំដាប់ឯកធាទាំងអស់ ចំណែកឯ $G=\{x+y+z-6,\,x-y+1,\,x+y-z\}$ គឺមិនមែនជាមូលដ្ឋាន *Gröbner* នៃ $I=\langle x+y+z-6,\,x-y+1,\,x+y-z\rangle$ ជាមួយនឹងលំដាប់សទ្ធានុក្រម ពីព្រោះ $lt\big(x+y+z-6-(x-y+1)\big)=lt(2y+z-7)=2y$ គឺចែកមិនដាច់នឹង $x=lt(x+y+z-6)=lt(x-y+1)=lt(x+y-z)$ ។

ដើម្បីទទួលយកគំនិតមូលដ្ឋាន *Gröbner* ជាមួយនឹងការជ្រើសរើសលំដាប់ឯកធា អ្នកអាចអនុវត្តតាមអាល់ការីតរបស់ *Buchberger* (3) ។ យើងអាចរកអាល់ហ្គោរីតក្នុងការគណនាមូលដ្ឋាន *Gröbner* ភាគច្រើនការគណនាតាមប្រព័ន្ធពិជគណិត ។

ជំនួសឲ្យគំនិតរបស់ *Gröbner* $I=\langle x+y+z-6,\,x-y+1,\,x+y-z\rangle$ ជាមួយនឹងលំដាប់សទ្ធានុក្រម នោះគឺ $G=\{x+y+-6,\,2y+z-7,\,2z-6\}$។

៤. ដំណោះស្រាយបញ្ហា និង ការអនុវត្តផ្សេងៗ

ប្រព័ន្ធសមីការដែលបានឲ្យក្នុងឧទាហរណ៍មានចំនួនកំណត់ជាច្រើននៃដំណោះស្រាយ (មាន ៩ អញ្ញាត ហើយអញ្ញាតនីមួយៗអាចយកតម្លៃមួយ ក្នុងចំណោមតម្លៃទាំងបី)។ បញ្ហាកំណត់បាន ប្រសិនជាប្រព័ន្ធអាចដោះស្រាយគ្រប់សមីការ ក្នុងករណីនេះ អាចកំណត់វាបាន ។

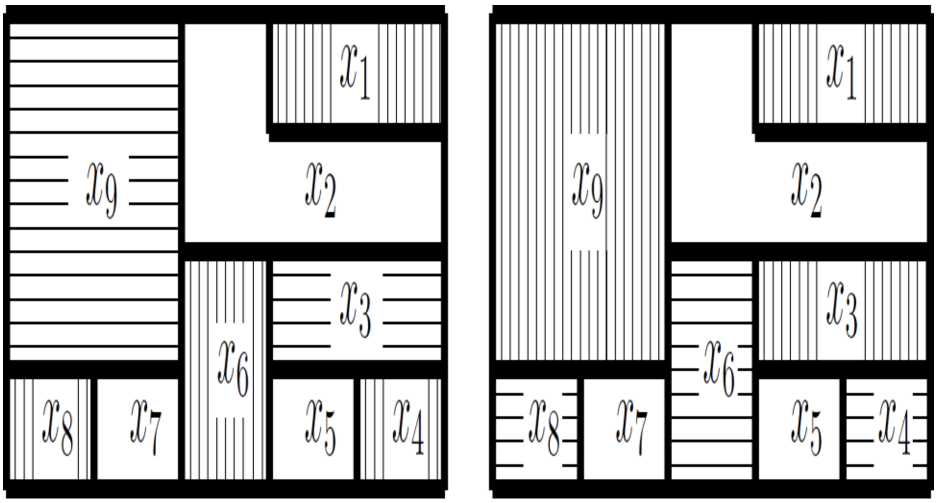
ការអនុវត្តរបស់អាល់ការីត *Bunchberger* ក្នុងប្រព័ន្ធសមីការនៃឧទាហរណ៍ទី១ យើងទទួលបានដូច *Gröbner G* ដែរ ជាមួយនឹងលំដាប់សទ្ទានុក្រមៈ

$$G=\{x_1^3-1\,;\,x_2^2+x_2x_1+x_1^2\,;\,x_3^2+x_3x_2-x_2x_1-x_1^2\,;\,x_4+x_3+x_2\,;x_5-x_2\,;\,x_6+x_3+x_2\,;\,x_7-x_2\,;\,x_8+x_3+x_2\,;\,x_9-x_3\}$$

ដូច្នេះ $1\notin I$ ត្រូវទៅនឹងប្រព័ន្ធចម្លើយដែលទទួលបាន។ សមីការ គឺៈ

$$\begin{cases} x_1^3-1=0 \\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2=0 \\ x_5-x_2=0 \\ x_7-x_2=0 \\ x_9-x_3=0 \end{cases}$$

តាមការបកស្រាយខាងលើ យើងអាចប្រើគ្រប់ពណ៌សម្រាប់ $x_1, x_2\neq x_1$, $x_2=x_5=x_7$ និង $x_3=x_9$ ពណ៌ត្រូវបានគេតាងដោយឫសទី៣នៃឯកតា ហើយរាល់ការដោះស្រាយ $x_4+x_3+x_2=0,\ x_6+x_3+x_2=0$ និង $x_8+x_3+x_2=0$ គឺជាតម្លៃសន្មតផ្សេងពី x_2 , x_3 និង x_4 ហើយដូច្នេះ $x_4=x_6=x_8$ ជាចុងក្រោយ $0=x_3^2+x_3x_2-x_2x_1-x_1^2=(x_3+x_2+x_1)(x_3-x_1)$ ឲ្យយើងនូវលទ្ធផលពីរគឺ $x_3+x_2+x_1=0$ ឬ $x_3-x_1=0$ នោះ x_1 , x_2 និង x_3 យកពណ៌ផ្សេងគ្នា ឬ $x_1=x_3$ ។ ដូច្នេះយើងរកដោយចំលាស់ពណ៌នោះរាល់ដំណោះស្រាយអាចធ្វើបានៈ



រូបភាព 2

មូលដ្ឋាន *Gröbner* ក៏អាចប្រើដើម្បីធ្វើប្រមាណវិធីដោយសុក្រិត្យ បម្លែងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទៅជាសមីការអាំព្លីស៊ីត (សម្រាប់ក្រឡាផ្ទៃ និងខ្សែកោង ចំពោះឧទាហរណ៍មួយចំនួន) ទៅក្នុងសមីការមិនប៉ារ៉ាម៉ែតដើម្បីគណនាពហុធាតូចបំផុតនៃចំនួនពិជគណិត ទ្រឹស្តីបទផ្សេងៗនៃធរណីមាត្រអឺគ្លីត ការសាងសង់សំណង់ និងការផ្គុំរូបនៃល្បែង *Sudoku* ៕

ឯកសារយោង

(1) http://ww.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf

(2) http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/dispense/nullstellen.pdf

(3) http://www.rise.jku.at/buchberg/papers/1970-00-00-Aenglsih.pdf

(4) Adams,W.and Loustaunau, P., An Introduction to Grobner Basis AMS , Providence Rl (1994).

(5) Cox, D; Little,J and O’Shea, D., Ideals,Varieties and Algorithm ,
2nd edition, Springer-Verlag, New York, (1996)

(6) Hermandes , H,E.,Um Primeiro Contato com Bases de Grobner,
28^0. Coloqui Brasileiro de Matematica , IMPA ,Rio de Janeiro ,
(2011).