អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

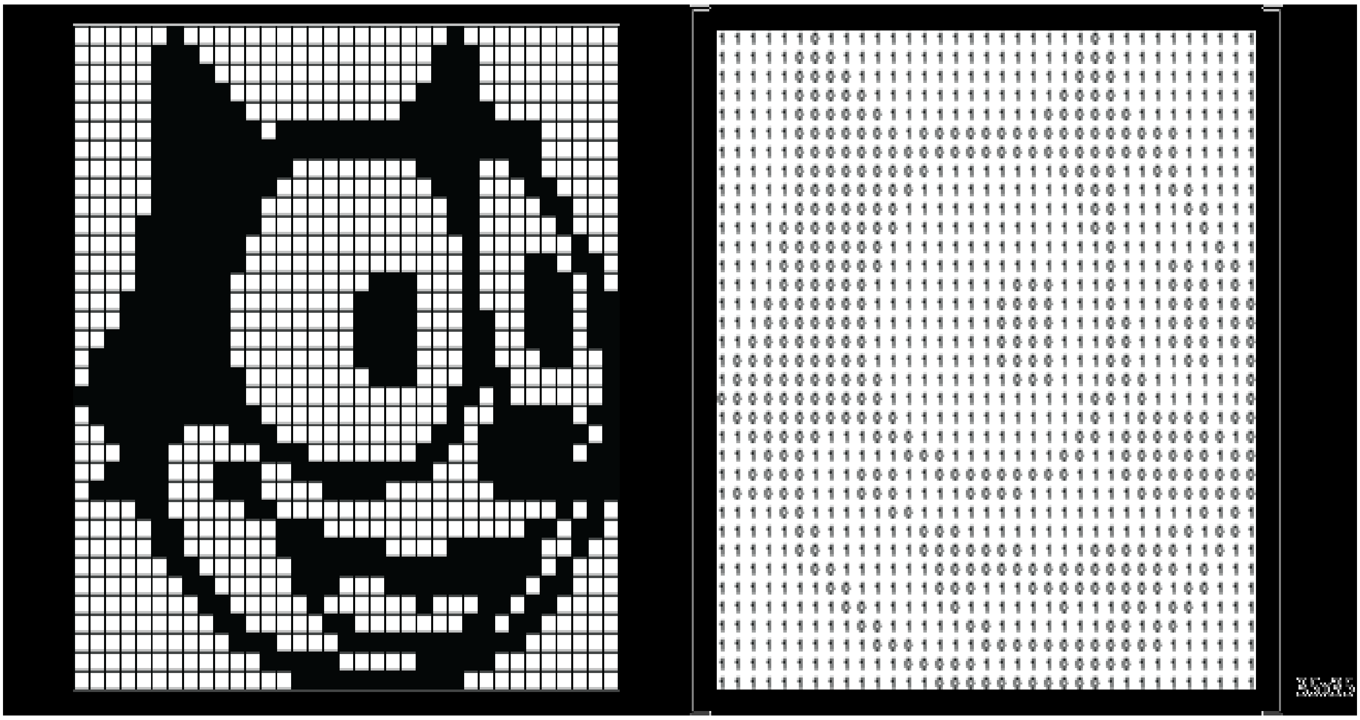
Klein Project Blog

➢ **<u>រូបភាពម៉ាទ្រីស និង រូបភាពឌីជីថល</u>**

(Matrices and Digital Images)

រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ: Dirce Uesu Pesco និង Humberto José Bortolossi

រូបភាពមួយចំនួនដែលអ្នកឃើញនៅលើទំព័រអ៊ិនធើរណែត (Internet) និងរូបថតដែលអ្នកថតដោយទូរស័ព្ទដៃរបស់អ្នក គឺជាគំរូនៃរូបភាពឌីជីថល *(Digital Images)* ។ យើងអាចតាងផ្នែកនៃរូបភាពនេះដោយ ម៉ាទ្រីស។ ឧទាហរណ៍: រូបភាពតូចនៃរូបភាព *Felix the Cat* (រូបភាពខាងឆ្វេង) គឺអាចតាងដោយម៉ាទ្រីស 35×35 ដែលធាតុនីមួយៗរបស់វាតាងដោយលេខ **0** និងលេខ**1**។ លេខទាំងនេះគឺបញ្ជាក់ពីពណ៌របស់*Pixel*នីមួយៗរបស់រូបភាព (*Pixel* គឺជាធាតុតូចបំផុតនៃក្រាហ្វិករបស់រូបភាពម៉ាទ្រីស *(Matrices Images)* ដែលអាចកំណត់ពណ៌បានតែមួយពណ៌ ក្នុងពេលតែមួយ) ដែលលេខ **0** កំណត់អោយពណ៌ខ្មៅ និងលេខ **1** កំណត់អោយពណ៌ស។ រូបភាពឌីជីថល *(Digital Images)* ដែលប្រើប្រាស់ពណ៌តែពីរពណ៌នេះ ត្រូវបានគេហៅថា *Binary Images* រឺ *Boolean Images* ។

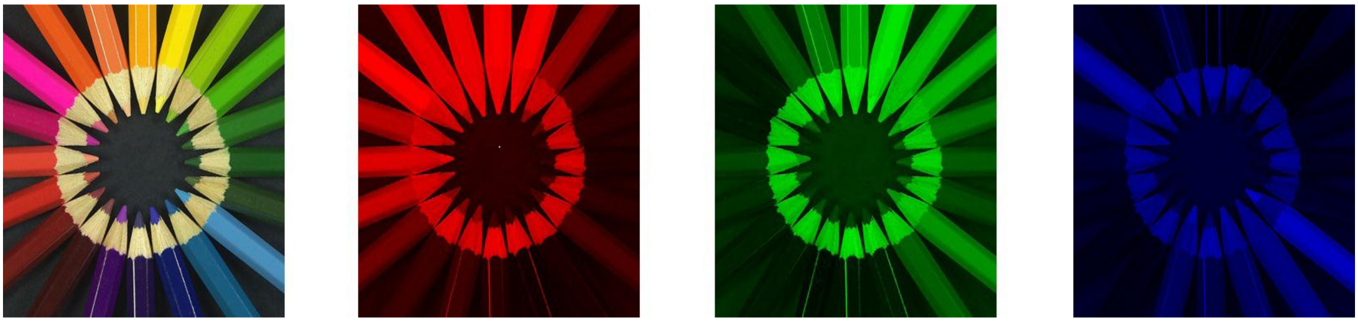


រូបភាព 2: ម៉ាទ្រីសត្រូវគ្នាទៅនឹងរូបភាពនៃ *Filex the Cat*

មាត្រដ្ឋានពណ៌នៃរូបភាព ក៏អាចតាងដោយម៉ាទ្រីសបានផងដែរ។ ធាតុនីមួយៗរបស់ម៉ាទ្រីស គឺកំណត់កម្រិតនៃភាពត្រូវគ្នារបស់ *Pixel* ។ ដើម្បីជាភាពងាយស្រួល រូបភាពឌីជីថល (*Digital Images*) ភាគច្រើននាពេលបច្ចុប្បន្ន គឺគេប្រើចំនួនគត់ចាប់ពីលេខ **0** (កំណត់អោយពណ៌ខ្មៅ ដែលជាកម្រិតពណ៌អប្បបរមា) ដល់លេខ **255** (កំណត់អោយពណ៌ស ដែលជាកម្រិតពណ៌អតិបរមា) ដែលផ្តល់ជាសរុបគឺ $256 = 2^8$ ផ្សេងៗគ្នានៃកម្រិតពណ៌

(បរិមាណកម្រិតនៃពណ៌នេះ គឺសមស្របទៅនឹងកិច្ចការផ្ទេររូបភាពលើគេហទំព័រ។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ គឺមានការអនុវត្តជាក់លាក់មួយចំនួនដែលត្រូវការកម្រិតពណ៌ច្រើនជាងនេះ ដើម្បីបង្កើតរូបភាពថ្មីឡើងវិញ)។

លំដាប់ពណ៌នៃរូបភាព គឺអាចតាងដោយម៉ាទ្រីសចំនួនបី។ ម៉ាទ្រីសនីមួយៗ បញ្ជាក់ពីបរិមាណ **ពណ៌ក្រហម** **ពណ៌បៃតង** និង **ពណ៌ខៀវ** ដែលជាសមាសភាពពណ៌នៃរូបភាព។ ប្រព័ន្ធពណ៌នេះ ត្រូវបានគេស្គាល់ថា ជាប្រព័ន្ធ *RGB* (មានប្រព័ន្ធពណ៌ជាច្រើនផ្សេងទៀត ដែលគេបានប្រើក្នុងការអនុវត្តដូចជា: *CMYK* (សម្រាប់ព្រីនឯកសារ) *Y'IQ* (សម្រាប់បញ្ជូនរូបភាពទូរទស្សន៍ទៅកាន់ *NTSC (National Television System Committee)* ជាដើម)។ ធាតុនៃម៉ាទ្រីសទាំងនេះគឺជាចំនួនគត់ចាប់ពីលេខ **0** ដល់លេខ **255**។ ហើយធាតុទាំងនេះគឺវាកំណត់អោយកម្រិត *Pixel* នៃរូបភាព ដែលធៀបទៅនឹងពណ៌របស់ម៉ាទ្រីស។ ដូចនេះ ក្នុងប្រព័ន្ធ *RGB* គេអាចតាងវាដោយ $256^3 = 2^{24} = 16777216$ ពណ៌ផ្សេងៗគ្នា។



រូបភាព 3: រូបភាពដើមដែលផ្សំឡើងដោយធាតុ ពណ៌ក្រហម ពណ៌បៃតង និង ពណ៌ខៀវ

➢ ដំណើរការរូបភាពឌីជីថល និងប្រមាណវិធីម៉ាទ្រីស

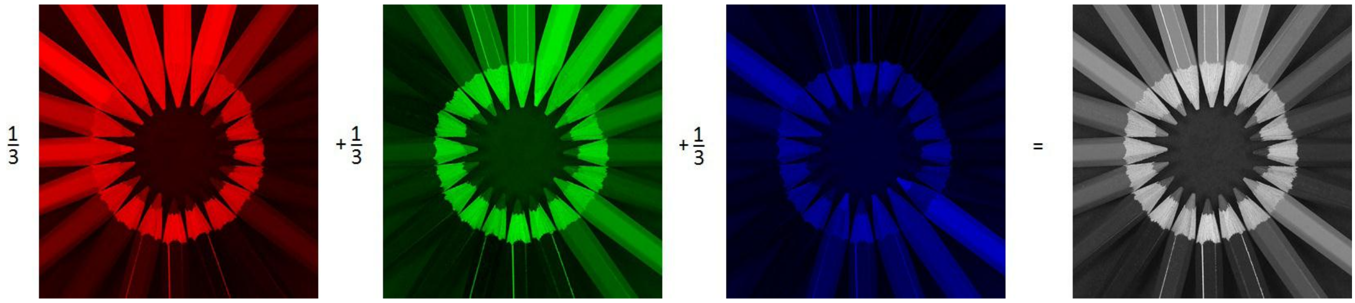
(Digital image processing and operations with matrices)

នៅពេលដែលរូបភាពឌីជីថលមួយ *(Digital Images)* អាចតាងដោយម៉ាទ្រីស នោះយើងនឹងផ្តល់ពីរបៀបធ្វើប្រមាណវិធីលើធាតុនីមួយៗដែលត្រូវគ្នានឹងរូបភាព។ ជាឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើយើងសន្មតថា រូបភាព *Binary A (Binary image A)*ខាងក្រោមគឺជាម៉ាទ្រីសមួយដែល $A=(a_{i,j})$ នោះរូបភាព*B* គឺត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីស *A* គឺ $B=(b_{i,j})=(a_{j,i})^T=A^T$។ បើតាមលំដាប់ រូបភាព *H* គឺត្រូវគ្នាទៅនឹងម៉ាទ្រីស $(a_{j,35-i+1})$។ សាកល្បងស្វែងរកម៉ាទ្រីសដែលមានទំនាក់ទំនងរវាងរូបភាព *A* ទៅនឹងរូបភាពដទៃទៀត!

A B C D E F G H

រូបភាព 4: ការប្រែប្រួលរបស់ម៉ាទ្រីស

ជាឧទាហរណ៍ផ្សេងទៀត ប្រសិនបើយើងអនុវត្តតាមមធ្យមនពន្តគំរូនៃធាតុផ្សំរបស់ម៉ាទ្រីស *R*, *G* និង *B* ដែលបានមកពីពណ៌នៃរូបភាព *A* នោះយើងនឹងបានមាត្រដ្ឋានពណ៌នៃរូបភាពថ្មីមួយ (តម្លៃមិនមែនជាចំនួនគត់មូលខិតជិតចំនួនគត់):

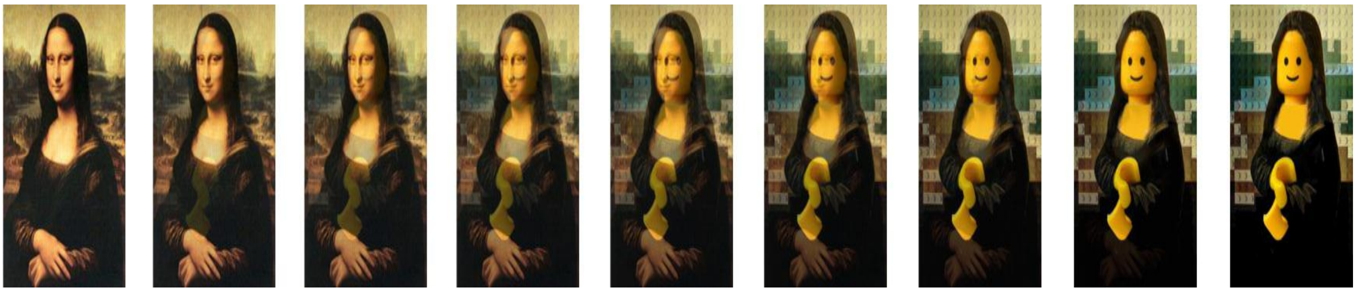


រូបភាព 5: មធ្យមនពន្ធរបស់ធាតុម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍មួយទៀតបាននិយាយថា ការប្រើប្រមាណវិធីគុណតាមរយៈផលគុណស្កាលែរ និងផលបូកម៉ាទ្រីស គឺវាអាចបង្កើតនូវការចម្លងរូបភាពមួយ ដែលជាធម្មតាត្រូវបានគេប្រើប្រាស់។ តួយ៉ាង គេប្រើវាដើម្បីធ្វើការរៀបចំ និងធ្វើបទបង្ហាញជា *Slide* ក្នុងកម្មវិធី *PowerPoint*© ។ ដើម្បីច្បាស់លាស់ជាងនេះទៅទៀត យើងសន្មតរូបភាពនៃមាត្រដ្ឋានពណ៌ចំនួនពីរដែលស្ថិតក្នុងទំហំប៉ុនគ្នា គឺតាងដោយម៉ាទ្រីស A និង Z ។ តាមរយៈធ្វើផលគុណស្កាលែរ (ចំនួនពិត) t ដែលស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ នោះយើងអាចកំណត់ម៉ាទ្រីសនេះដោយៈ

$$M(t)=(1-t)A+tZ$$

កត់សំគាល់ថា $M(0)=A, M(1)=Z$ ចំពោះ t ស្ថិតនៅចន្លោះពី **0** ទៅ **1** នោះធាតុនីមួយៗរបស់ម៉ាទ្រីស $M(t)$ គឺជាចន្លោះរវាងធាតុនីមួយៗរបស់ម៉ាទ្រីសA និង Z។ ដូចនេះ នៅពេលដែល t ប្រែប្រួលពី **0** ទៅ **1** នោះម៉ាទ្រីស $M(t)$ ក៏ប្រែប្រួលពី A ទៅ Z ដែរ។ ចំពោះករណីនៃពណ៌របស់រូបភាពនីមួយៗ ធ្វើការប្រែប្រួលដូចខាងលើនោះ គឺយើងត្រូវតែអនុវត្តតាមម៉ាទ្រីស R, G និង B ដើម្បីបង្កើតរូបភាពនីមួយៗ។



រូបភាព 6:

$$M(0)=A, M(0.13), M(0.25), M(0.38), M(0.50), M(0.63), M(0.75), M(0.88), M(1)=Z$$

ផលគុណនៃម៉ាទ្រីស ក៏អាចអនុវត្តក្នុងដំណើរការរូបភាពឌីជីថល *(Digital Images)* បានផងដែរ។ ទោះបីជាយ៉ាងណា ឧទាហរណ៍របស់យើងបន្ទាប់ នឹងធ្វើការលម្អិតជាងនេះទៅទៀត (ភាពផ្អែកលើបច្ចេកទេសគណិតវិទ្យាជឿនលឿនជាច្រើន ដែលជាធម្មតា ត្រូវបានគេសិក្សាតែនៅក្នុងសាកលវិទ្យាល័យផ្នែកពិជគណិតលីនេអ៊ែរតែប៉ុណ្ណោះ) យើងនៅតែសង្ឃឹមជឿជាក់ថា វានឹងជាប្រយោជន៍ចំពោះអ្នកអាន ព្រោះថានេះគឺជាកាលានុវត្តភាពចំពោះភាពរីករាយទៅនឹងការងឿងឆ្ងល់នៃការអនុវត្តមួយដែលចេញពីសមត្ថភាពនៃការបំបែកធាតុរបស់ម៉ាទ្រីសមួយ ទៅជាផលគុណម៉ាទ្រីសមួយដែលមានទម្រង់ពិសេស។ ប្រសិនបើការលម្អិតមានការខ្វះខាត លោកអ្នកអាចស្វែងរកក្នុងឯកសារយោង[Lay, 2011] និង[Poole, 2005]។ ដូចនេះ សន្មតថាវាគឺជាការបំបែកតម្លៃដ៏អស្ចារ្យមួយ *(SVD)* ដែលកើតឡើងដោយការសរសេរម៉ាទ្រីស $A_{m\times n}$ មួយជាផលគុណបីម៉ាទ្រីសៈ

$$A_{m\times n} = U_{m\times m} S_{m\times n} V_{n\times n}^{T}$$

ដែល U និង V គឺជាម៉ាទ្រីសអរតូកូណាល់ (U^TU និង V^TV គឺជាម៉ាទ្រីសឯកតលំដាប់ $m\times m$ និង $n\times n$ រៀងគ្នា) និង S ជាម៉ាទ្រីសមួយ ដែលធាតុ $s_{i,j}$ ស្មើសូន្យចំពោះ $i\neq j$ និង $s_{1,1}\geq s_{2,2}\geq\ldots\geq s_{k,k}\geq 0$ ដែល $k=\min\{m,n\}$ ។ នេះជាឧទាហរណ៍មួយនៃការបំបែក *SVD* :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=USV^T=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}^T$$

វាអាចបង្ហាញអោយឃើញថា ម៉ាទ្រីសទាំងអស់សុទ្ធតែមានការបំបែក *SVD* ([Lay, 2011], [Poole, 2005])។ លើសពីនេះទៅទៀត សារៈសំខាន់នៃវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយនេះ អាចអោយយើងគណនាបានដូចជា ការបំបែកដោយការប្រើប្រាស់កុំព្យូទ័រ។ ចំណុចសំខាន់នៃឧទាហរណ៍របស់យើង គឺដើម្បីធ្វើការអង្កេតអោយឃើញថា ប្រសិនបើ $u_1,u_2,\ldots,u_m$ ជាជួរឈររបស់ម៉ាទ្រីស U ហើយ $v_1,v_2,\ldots,v_n$ ជាជួរឈររបស់ម៉ាទ្រីស V នោះយើងបាន៖

$$A=USV^T=s_{1,1}u_1v_1^T+s_{2,2}u_2v_2^T+\cdots+s_{k,k}u_kv_k^T$$

តើហេតុអ្វី? ឧបមាថា A គឺជារូបភាពមាត្រដ្ឋានពណ៌ប្រផេះមួយដែលមានទំហំ 1000×1000 ត្រូវបានគេបញ្ជូនពីផ្កាយរណបទៅកាន់ស្ថានីយ៍នៅលើផែនដី។ ជាគោលការណ៍ ផ្កាយរណបនេះត្រូវបញ្ជូនមួយលានតួលេខ (ផ្នែកមួយរបស់ *Pixel* នីមួយៗ)។ តួយ៉ាង ត្រឹមតែធាតុ $s_{i,j}$ ដំបូងរបស់ម៉ាទ្រីស S នៃការបំបែកធាតុ *SVD* របស់ម៉ាទ្រីស A គឺវាសំខាន់គ្រប់គ្រាន់ទៅហើយដែលផ្កាយរណបនេះបញ្ជូន ពោលគឺ 20 ខ្ទង់ដំបូងរបស់ U និង V ហើយនិង 20 តួលេខដំបូងរបស់ធាតុ $s_{i,j}$ (ជាសរុប ត្រឹមតែ 20.1000+20.1000+20=40020 តួលេខដែលត្រូវបញ្ជូន)។ ទិន្នន័យទាំងអស់ដែលទទួលបាន ខាងលើ ត្រូវបានស្ថានីយ៍នៅលើផែនដីគណនាដោយម៉ាទ្រីស $s_{1,1}u_1v^T{}_1+s_{2,2}u_2v^T{}_2+\cdots+s_{20,20}u_{20}v^T{}_{20}$ ដែលនឹងផ្តល់នូវរូបភាពពិតដើមមួយ។

ឧទាហរណ៍៖ រូបភាពខាងក្រោមនេះ គឺជារូបភាពរូបភាពរបស់អ្នកគណិតវិទូម្នាក់ឈ្មោះ *Christian Felix Klein* ដែលមានទំហំ $720\times521=377280$ *pixels* ។

រូបភាព 7: *Felix Klein*

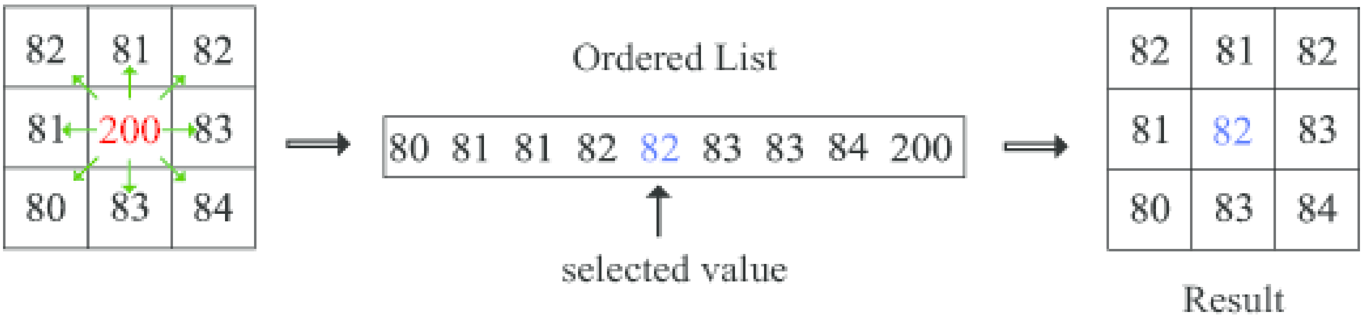
តាមការបំបែកធាតុ *SVD* នៃម៉ាទ្រីសត្រូវគ្នារបស់រូបភាពនេះ យើងអាចគណនាម៉ាទ្រីស $s_{1,1}u_1v^T{}_1 + s_{2,2}u_2v^T{}_2 + \cdots + s_{r,r}u_rv^T{}_r$ បាន ចំពោះ $r = 1,5,10$ និង 20។ ម៉ាទ្រីសទាំងនេះ ធ្វើអោយខិតជិតទៅនឹងរូបភាពដើម ដូចបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពខាងក្រោម។ សង្កេតមើល រូបភាពដើមដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងករណី $r = 524$ ។ តើវាពិតជាគួរអោយចាប់អារម្មណ៍ដែររឺទេ?

រូបភាព 8: ករណី $r = 1,5,10$ និង 20

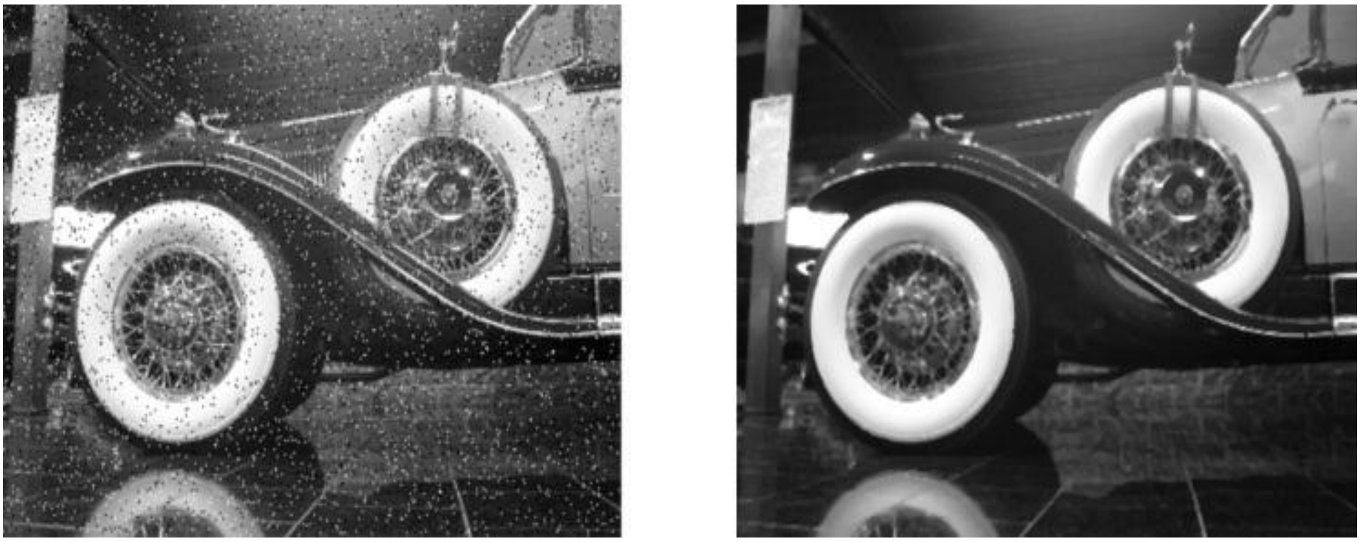
- **ការអនុវត្តន៍ផ្សេងៗ**

ដំណើរការរូបភាពឌីជីថល *(Digital image processing)* ត្រូវបានអនុវត្តក្នុងផ្នែកមួយចំនួនដូចជា ផ្នែក *remote sensing* ការបញ្ជូនទិន្នន័យ ផ្នែកវិជ្ជសាស្រ្ត ផ្នែកមនុស្សយន្ត *(robotics)* ផ្នែក *vision* របស់កុំព្យូទ័រ និងឧស្សាហកម្មផ្នែកភាពយន្ត ជាដើម។ តួយ៉ាង ចំពោះផ្នែក *remote sensing* រូបភាពទាំងអស់ដែលបានមកពីផ្កាយរណប គឺវាមានប្រយោជន៍ដល់ ការតាមដានធនធានធម្មជាតិ ការគូរផែនទីភូមិសាស្រ្ត ការវិភាគការកើនឡើងនៃទីក្រុង និងការអនុវត្តទៅលើផ្នែកបរិស្ថានផ្សេងៗទៀត។ ចំពោះផ្នែកបញ្ជូនរូបភាព យើងបានប្រើក្នុងផ្នែកទូរគមនាគន៍ តាមរយៈ *fax* បណ្តាញ*(network)* អ៊ិនធើរណែត*(Internet)* ហើយនិងសៀគ្វីបិទរបស់ទូរទស្សន៍*(Closed-circuit TV)* សម្រាប់ត្រួតពិនិ-ត្យការផ្សាយ និងបំពេញការខ្វះខាត។ ក្នុងការអនុវត្តផ្នែកវិជ្ជសាស្រ្ត យើងបានប្រើប្រាស់ក្នុងដំណើរការរូបភាព *X-ray* ការបញ្ចាំងរូបភាព *Transaxial tomography* ការព្យាបាលដោយប្រើវិទ្យុសកម្ម ភាពខ្វះរបស់មេដែក និងប្រើក្នុងម៉ាស៊ីន ស្កេនដែលមានកម្រិតប្រេកង់លើសពី $20KH_Z$ ឡើងទៅ *(ultrasonic scanning)*។

វិធីសាស្រ្តមួយចំនួននៃការទទួល និងការបញ្ជូននៃរូបភាពគឺអាចធ្វើអោយរូបភាពមានភាពមិនច្បាស់។ តម្រងភាពរំខាននៃរូបភាព *(median filter)* គឺជាបច្ចេកទេសនៃដំណើរការរូបភាពមួយ ដែលបានប្រើដើម្បីបំបាត់ភាពរំខាន រឺកាត់បន្ថយនូវអានុភាពនៃភាពរំខាន: ចំពោះធាតុនីមួយៗដែលតាងអោយម៉ាទ្រីសរបស់រូបភាព ចូរយើងសង្កេតមើលធាតុជាប់វា ហើយបន្ទាប់មកយើងរៀបពួកវាក្នុងបញ្ជីតាមលំដាប់។ តាមរយៈតម្រងភាពរំខាននៃរូបភាព *(median filter)* យើងជ្រើសរើសធាតុកណ្តាលរបស់បញ្ជីនេះ ហើយជំនួសធាតុកណ្តាលដោយធាតុដែលយើងបានជ្រើសរើស។

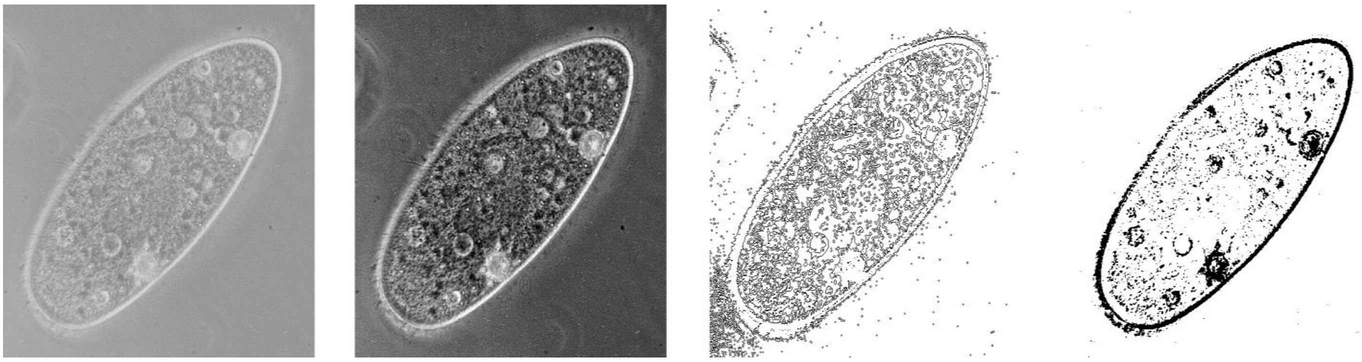


រូបភាព 9: តម្រងសម្លេងវិទ្យុកណ្ដាល *(the median filter)*



រូបភាព 10: រូបភាពដែលមានភាពរំខាន និងរូបភាពដែលមានតម្រងភាពរំខាននៃរូបភាព *(the median filter)*

មានបច្ចេកទេសផ្សេងៗជាច្រើនទៀត ក្នុងដំណើរការរូបភាព ដែលប្រកបដោយគោលដៅខុសៗគ្នា។ តាមរយៈរូបភាពខាងក្រោម គឺបង្ហាញពីគំរូនៃការកែខៃធ្វើអោយមានភាពខុសគ្នាទៅលើការចាប់បាននូវរូបភាពផ្ទេរ និងផ្លូវចូល។



រូបភាព 11: រូបភាពដើម និងរូបភាពដដែលជាមួយនឹងការកែខៃធ្វើអោយមានភាពខុសគ្នា ទៅលើការចាប់បាននូវរូបភាពផ្ទេរ និងផ្លូវចូល

ឯកសារយោង

Gomes, J.; Velho, L. *Image Processing for Computer Graphics and Vision*. Springer-Verlag, 2008.

Gonzalez, R. C.; Woods, R. E. *Digital Image Processing*. Third Edition. Prentice Hall, 2007.

Lay, D. *Linear Algebra and Its Applications*. Forth Edition. Addison Wesley, 2011.

Poole, D. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. Second Edition. Brooks Cole, 2005.

The photo of the Mona Liza in LEGO is a property of Marco Pece Udronotto, who kindly granted permission to use it in this work.