អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

តើវិធីសាស្ត្រនៃបណ្តុំផ្លែក្រូចទាំងនេះគឺជាអ្វី? ការប៉ាន់ស្មានរបស់ *Kepler* ទៅលើបណ្តុំនៃស្វ៊ែរ

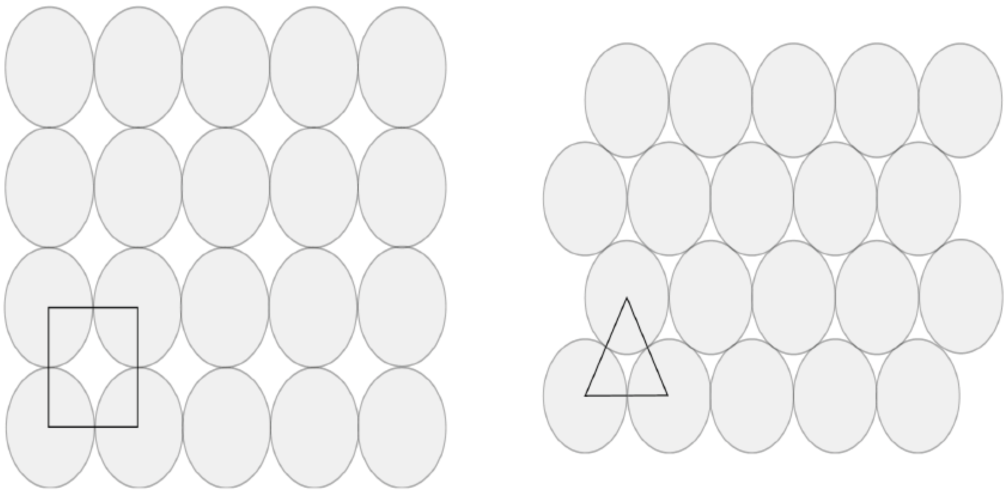
រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ: Christiane Rousseau។

តើកម្រាស់របស់ស្វ៊ែរគឺជាអ្វី? *Kepler* ប៉ាន់ស្មានថាវាគឺជាការប្រតិបត្តិរបស់អ្នកនៅតាមហាងលក់ផ្លែក្រូចតែប៉ុណ្ណោះ ដែលត្រូវបានគេហៅថា ចំណុចកណ្តាលនៃបន្ទះឈើមួយគូបតែប៉ុណ្ណោះ (រូបភាពទី1)។ ក្នុងការធ្វើសន្និដ្ឋានគណិតវិទ្យាអន្តរជាតិឆ្នាំ1900 *David Hilbert* បានឱ្យសាស្ត្រាចារ្យដ៏ល្បីល្បាញម្នាក់បានធ្វើបទបង្ហាញទៅលើ 23 បញ្ហាដែលជាសេចក្តីដ៏សំខាន់និងមានអត្ថន័យរបស់ពិភពលោកសម្រាប់ការគ្រោងទុកមុននៃវិទ្យាសាស្ត្រគណិតវិទ្យានៅសតវត្សទី20។ បញ្ហាកម្រាស់របស់ស្វ៊ែត្រូវបាន *Kepler* ប៉ាន់ស្មានថាជាផ្នែកមួយនៃបញ្ហារបស់ *Hilbert* នៅសតវត្សទី18 ផងដែរ។ ការប៉ាន់ស្មានរបស់ *Kepler* គឺគ្រាន់តែបង្ហាញភស្តុតាងនៅក្នុងឆ្នាំ1998 ដោយ *Thomas Hales* តែប៉ុណ្ណោះ ហើយធ្វើសេចក្តីលំអិតទៅលើដំណោះស្រាយជាសាធារណៈនៅឆ្នាំ 2006។

១. តើយើងចែករំលែកបញ្ហាទាំងនេះយ៉ាងដូចម្តេច?

យើងសម្រេចចិត្តផ្សេងៗគ្នាពីរូបសណ្ឋាននៃទំហំរបស់ស្វ៊ែរ *(solid balls)* នៅក្នុងលំហ ក្នុងករណីនីមួយៗយើងគណនាពីកម្រាស់នៃបណ្តុំរបស់ស្វ៊ែរ។ ឧទាហរណ៍ថា៖ ភាគនៃចំណុចប្រសព្វដែលជាកន្លែងរបស់ស្វ៊ែរ យើងនឹងហៅ p_n ជាកម្រាស់ធំបំផុតនៃបណ្តុំរបស់ស្វ៊ែរក្នុងទំហំ n។ ជាការពិតណាស់កម្រាស់របស់ស្វ៊ែរ គឺផ្អែកទៅលើទ្រង់ទ្រាយនៃរូបដើមទៅតាមតំបន់។ ដើម្បីជៀសវាងបញ្ហាទាំងនេះ យើងបានសម្រេចចិត្តទៅតាមតំបន់យ៉ាងធំ។ ដូច្នេះប្រសិទ្ធិភាពនៃព្រំដែនអាចចោលបាន។ *Kepler* បានបង្កើតឡើងក្នុងឆ្នាំ 1611 ថា កម្រាស់នៃរូបសណ្ឋានរបស់ស្វ៊ែរ គឺជាការអនុវត្តរបស់អ្នកជាមួយនឹងផ្លែក្រូចដែលលក់នៅតាមទីផ្សារ។

ដូច្នេះ ហេតុអ្វីបានជាមានរយៈពេលយូរក្នុងការបង្ហាញភស្តុតាងនៃការប៉ាន់ស្មានទាំងនេះ? បញ្ហា គឺជាចំនួនមិនកំណត់នៃលទ្ធភាពរូបសណ្ឋានរបស់ស្វ៊ែរ។ ក្នុងពេលនីមួយៗយើងយករូបសណ្ឋានរបស់ស្វ៊ែរ យើងអាចបង្ហាញថា កម្រាស់គឺតិចជាង ឬស្មើទៅនឹងការប្រតិបត្តិនៅតាមទីផ្សារ។ ប៉ុន្តែបញ្ហាគឺយើងអាចពណ៌នាក្នុងចំនួនកំណត់មួយនៃរូបសណ្ឋានរបស់វា។ ព្រឹត្តិការណ៍មួយរូបរាងតែមួយ ការគណនានៃកម្រាស់របស់ស្វ៊ែរមួយចំនួន វាមានការលំបាក ឬវាមិនមានលទ្ធភាពគណនាតែម្តង បើរូបរាងរបស់វាមិនជាក់លាក់។ បញ្ហានៃកម្រាស់របស់ស្វ៊ែរ *(solid balls)* គឺស្ថិតនៅក្នុងខ្នាតទាំងអស់។ វាត្រូវបានដោះស្រាយក្នុងឆ្នាំ 1890 សម្រាប់ខ្នាត 2 នៃ *(solidball)* បណ្តុំនៃបាល់គឺជា ខ្នាតខ្ពស់បំផុតដែលមានការអនុវត្តផ្នែកខាងក្នុង ឧបមាដូចជាការខុសលើការកែតម្រូវលេខកូដជាដើម។ រួចរាល់ក្នុងរូបទាំង 2 ខាងក្រោមនេះ យើងបានជួបប្រទះដូចគ្នានឹងបញ្ហា 2 ដែលវាលំបាក។ យើងមិនអាចរៀបរាប់ពីរូបរាងទាំងអស់នោះទេ ហើយម្យ៉ាងវិញទៀត រូបរាងខ្លះមិនមានទម្រង់ជាក់លាក់។ យើងនឹងបង្ហាញថា តើយើងចែកចាយការលំបាកទាំងនេះយ៉ាងដូចម្តេច? បន្ទាប់មកគឺរូបភាពទី 2



(a) (b)

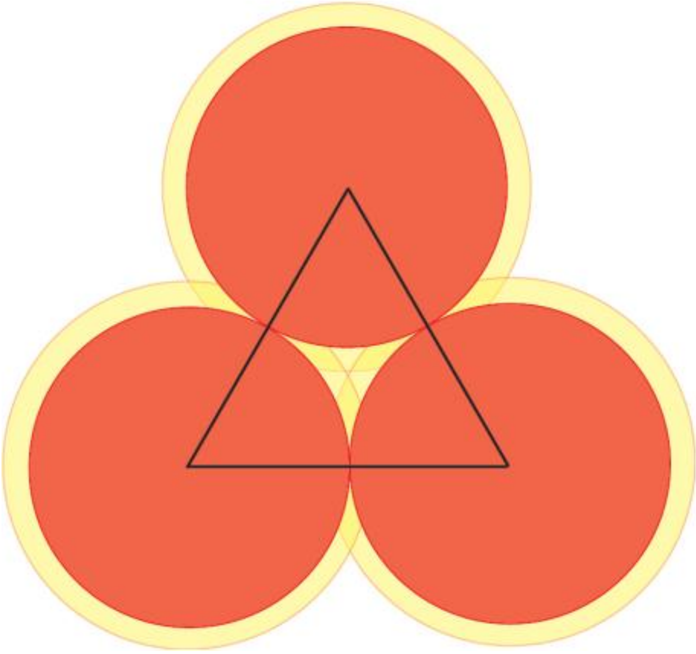
គឺជាកម្រាស់ទាំងអស់នៃរូបសណ្ឋាន។ យើងនឹងពន្យល់ការលំបាកទាំងអស់ពីដំណោះស្រាយពីករណីទំហំទី 3។ ហើយយើងនឹងបញ្ចប់ជាមួយពាក្យពីរបីម៉ាត់លើទំហំខ្ពស់។

២. ករណីវិមាត្រពីរ

ពិនិត្យទៅលើបណ្តុំនៃថាសពីរក្នុងរូបទី 2។ វាគឺជាលំហាត់ងាយស្រួល ដើម្បីគណនាសមាមាត្រនៃការេនីមួយៗដែលគ្រប់ដណ្តប់ដោយភាគនៃថាសក្នុងករណី (a) និងផ្ទៃរាបស្មើរបស់ត្រីកោណដែលគ្រប់ដណ្តប់ដោយភាគនៃថាសក្នុងករណី (b)។ ប្រសិនបើយើងធ្វើដូច្នេះ យើងឃើញថាបណ្តុំលើកទី 2 គឺមានកម្រាស់ក្រាស់ជាង។ តាមពិតបណ្តុំ (a) វាមានកម្រាស់ $\frac{\pi}{4}=0.7853$ ហើយបណ្តុំ (a) មានកម្រាស់ $P_2=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=0.9069$ ក្នុងពេលនីមួយៗដែលយើងពិនិត្យបណ្តុំរាបស្មើមួយ យើងអាចបង្ហាញថាវាមានកម្រាស់តិចជាងបណ្តុំនៃរូបទី 2 (b)។

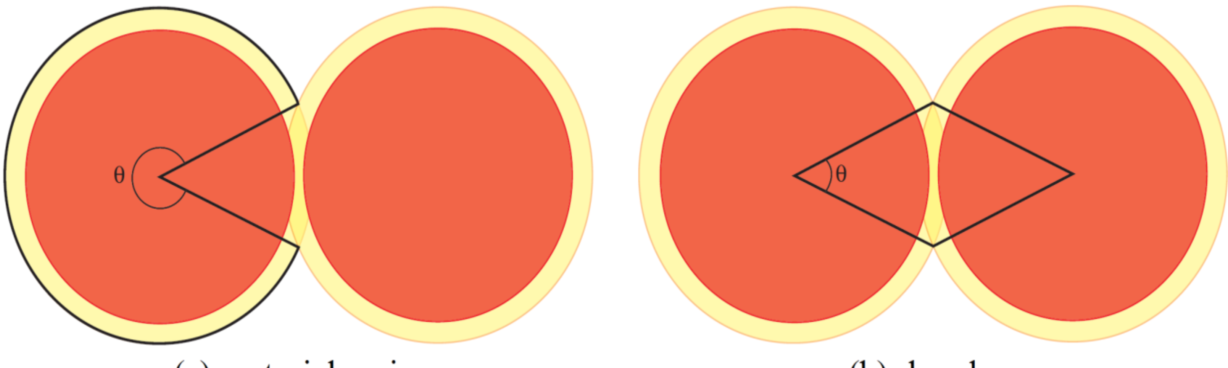
ប៉ុន្តែ តើយើងបង្ហាញករណីបណ្តុំជាច្រើនយ៉ាងដូចម្តេច?

វាជាគំនិតដ៏ឆ្លាតវៃ ដែលយើងត្រឡប់ក្រោយទៅកាន់គណិតវិទ្យា *Norwegian, Axel Thue* ក្នុងឆ្នាំ 1890។ យើងចែកគម្រោងតាមតំបន់ ហើយយើងបង្ហាញថាគ្រប់តំបន់ទាំងអស់កម្រាស់មានតិចតួច ឬស្មើទៅនឹង $P_2=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=0.9069$ យើងមើលរូបទី 3 យើងមានថាសបីមិនអាចបិទទៅវិញទៅមកបាន។ ឥឡូវយើង ក្រឡេកមើលត្រីកោណដែលបញ្ឈរនៅចំកណ្តាលថាស។ ខាងក្រៅនៃត្រីកោណនេះ មានតំបន់តូចមួយមិនគ្របដណ្តប់ដោយថាស។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ យើងពង្រីកថាសដោយកត្តា $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ បន្ទាប់មកយើងពង្រីកថាសបំពេញត្រីកោណ ហើយនិងកត្តា c ជាតម្លៃលទ្ធផលតូចបំផុត។



រូបភាពទី 3: តំបន់តូចមួយដែលប៉ះប្រផិតប្រផើយរវាងថាសបី

យើងប្រើមធ្យោបាយនេះដើម្បីចែកផ្ទៃរាបកក្នុងតំបន់ល្អមមួយ។ យើងពិនិត្យមើលបណ្តុំផ្ទៃរាបនៃកាំថាស r ។ សម្រាប់ថាសនីមួយៗ យើងបង្កប់វាទៅផ្នែកខាងក្រៅនៃថាសជាមួយចំណុចកណ្តាលដូចគ្នា និងកាំ $R = cr$ យើងហៅថាថាសមួយដ៏ធំ។ ឥឡូវយើងអាចរកតំបន់បីរបស់យើង តំបន់មុនគេគឺចំណែកបង្គ្រប់រួមគ្នានៃថាសធំ។ ជាក់ស្តែង កម្រាស់នៃតំបន់នោះគឺស្មើសូន្យ។ ផ្នែកលើចម្ងាយរវាងចំណុចកណ្តាលនៃថាសធំ អាចឬមិនអាចត្រួតលើគ្នា។ នៅពេលថាសធំត្រួតគ្នា ចំណែករង់ទល់គ្នានៃពួកវា យើងបញ្ចូលចំណុចរង់មួយនេះទៅក្នុងចំណុចកណ្តាលនៃថាស។ វិធីសាស្រ្តចែកថាសធំទៅក្នុងចំណែកជាច្រើន។ វាមានប្រភេទពីរនៃចំណែកនេះ។

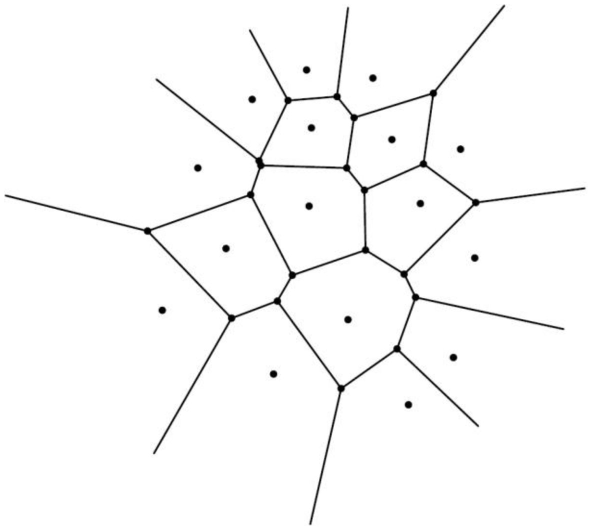


រូបភាពទី 4: ប្រភេទនៃតំបន់ពីរជាមួយការគ្មានកម្រាស់

- ចំណែកនៅក្នុងថាសធំមិនមានការត្រួតគ្នាជាមួយថាសផ្សេងទៀតដូចរូបទី 4 (b) ទេ។ ក្នុងចំណែកថាសខ្លះទៀតគឺស្មើនឹង $\frac{1}{c^2} = \frac{3}{4}$។
- ផ្នែកខ្លះក្នុងថាសធំត្រួតគ្នាដូចរូបទី 4 (b)។ យើងយកចំណែកទាំងនេះដោយដាក់ជាគូរដូចនៅក្នុងរូប។ ការរួមគ្នានៃផ្នែកពីរ គឺផ្ទៃបួនជ្រុងស្មើ ហើយយើងត្រូវការពិនិត្យផ្នែកខាងក្រៅនៃកម្រាស់ចតុកោណមួយនេះ។ យកចម្ងាយរវាងចំណុចកណ្តាលនៃថាសស្មើនឹង $2r$ ព្រោះថាសមិនត្រួតគ្នា។ ការគណនាមួយ

បង្ហាញថា ការយកតម្លៃធំបំផុតនៃចំណែកគឺ $\frac{\pi}{3}$។ តាង θ គឺជាចំនួនដែលចែកបាននៃតំបន់របស់ផ្នែកពីរនៃថាសដោយតំបន់នៃចតុកោណ។ ផ្នែកនីមួយៗនៃថាសមានតម្លៃ $\frac{r\theta}{2}$។ ដូច្នេះតំបន់ដែលគ្រប់ ដោយថាសខាងក្រៅចតុកោណគឺ $r\theta$។ តំបន់នៃចតុកោណនៃផ្នែក R និង θ គឺរកបានដោយបំបែកចតុកោណទៅក្នុងត្រីកោណ។ វាមានតម្លៃស្មើនឹង $2R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=R\sin\theta$ ។ ដូច្នេះកម្រាស់គឺ $\mu(\theta)=\frac{r^2\theta}{R^2\sin\theta}=\frac{3\theta}{4\sin\theta}$។

វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ $\mu(\theta)$ ក្នុងចន្លោះ $[0,\frac{\pi}{3}]$ ហើយដើម្បីឱ្យឃើញថាលទ្ធផលរបស់វា គឺមានតម្លៃធំបំផុតគឺ $\mu(\frac{\pi}{3})=p_2=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ តាមពិត $\mu'(\theta)=\frac{3}{4}\times\frac{\tan\theta-\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}>0,\tan\theta>\theta$, S ដំណោះស្រាយមួយនេះជាចម្លើយមួយដ៏ល្អបំផុត។ ឥឡូវយើងពិនិត្យឱ្យលំអិតទៅលើលក្ខណៈរបស់វា។ កម្រាស់ដែលល្អបំផុតគឺ p_2 ជាចម្លើយដ៏ល្អផងដែរ សម្រាប់កម្រាស់នីមួយៗនៃប្លង់ដែលយើងបានពិនិត្យ។ វាជាផ្លូវមួយផ្សេងទៀតដើម្បីបែងចែកប្លង់ទៅក្នុងតំបន់។ វាគឺជា *Voronoi diagram* នៃសំណុំរបស់ចំណុចកណ្តាលនៃថាស។ ការពិនិត្យសំណុំ S តំបន់មួយនេះត្រូវបានគេហៅថា *Voronoi cells*។ គេឲ្យប្រវែង PP' គឺជារូបធរណីមាត្រនៃចំណុចដែលមានចម្ងាយស្មើទៅចំណុច P និង P' វាមិនមានអ្វីចម្លែកចិត្តទេ ដែល *Voronoi diagram* សំណុំចំណុចដូចជារូបភាពទី 5 វាមានលក្ខណៈសាមញ្ញរវាងគូដែលនៅជិតគ្នានៃ *Voronoi cells* ចាប់ផ្តើមឱ្យដោយប្រវែងបន្ទាត់នៃសំណុំចំណុច S ភ្ជាប់ទៅប្រអប់ពីរៗ។



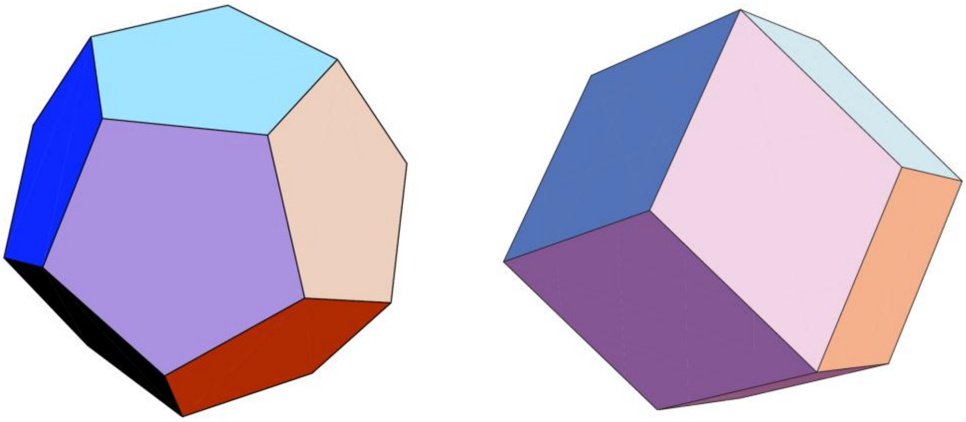
រូបភាពទី 5: *Voronoi diagram* ភ្ជាប់ទៅចំណុចនីមួយៗនៃសំណុំ S របស់ *Voronoi cells*

នៅពេលដែលយើងមានបណ្តុំថាសក្នុងប្លង់ វាគឺជាធម្មជាតិដែលយើងមើលទៅលើ *Voronoi diagram* នៃសំណុំដែលជាចំណុចកណ្តាលនៃថាស។ ឥឡូវ យើងក្រឡេកមើលឧទាហរណ៍នៃរូបភាពទី 2។ ផ្នែកខាងឆ្វេង *Voronoi cells* គឺជាការេ។ ហើយនៅផ្នែកខាងស្តាំគឺជាឆកោណ ហើយផ្នែកខាងក្រៅកម្រាស់នៃថាសនីមួយៗរាងឆកោណ *Voronoi cells* មានតម្លៃយ៉ាងច្បាស់ B ស្មើនឹង P_2។ ចូរចង់ចាំថា ការព័ទ្ធជុំវិញថាសជាមួយនឹងថាសមិនត្រួតគ្នានៃកាំដូចគ្នា *Voronoi cells* ជាមួយតំបន់តូចបំផុតគឺជា បណ្តុំនៃឆកោណ។

៣. ករណីវិមាត្របី

៣.១ ការលំបាកនៃបញ្ហា

វាជាធម្មជាតិមួយដែលព្យាយាមធ្វើឲ្យមានគំនិតទូលំទូលាយដើម្បីករណីទំហំខ្នាតបីនេះ។ *Voronoi diagram* អាចរកបានដូចកាលពីមុនដែរ។ ប្រអប់របស់វា គឺពហុកោណប៉ោង។ ឥឡូវយើងធ្វើព័ទ្ធជុំវិញស្វ៊ែរដោយដាក់ស្វ៊ែរប្រផុតប្រផើយ។ យើងអាចដាក់ស្វ៊ែរ 12 កន្លែង ប៉ុន្តែក្នុងករណីស្វ៊ែរទល់មុខគ្នា ដែលមានផ្ទៃរាបស្មើដែលមានផ្ទៃនៅសល់ជុំវិញស្វ៊ែរដំបូង។ យើងព្យាយាមផ្លាស់ប្តូរជុំវិញស្វ៊ែរទាំង 12 ឱ្យប្រផុតប្រផើយគ្នាហើយឃើញ ប្រសិនបើយើងផ្លាស់ប្តូរ 13 កន្លែង។ វាមានភស្តុតាងដោយ *Thomas Hales* នេះគឺមិនទាន់មានលទ្ធភាពនោះទេ ប៉ុន្តែវាមិនមានវិធីដូចគ្នាច្រើនទេក្នុងការដាក់ស្វ៊ែរឲ្យប្រផុតប្រផើយគ្នាដើម្បីឱ្យពួកវាបង្កើតបានជា *Voronoi cells* ដែលមានទំហំដូចគ្នា។ ការប៉ាន់ស្មានបរមាដើម្បីឲ្យមានតម្លៃតូចបំផុត *Voronoi cells* គឺស្វ៊ែរទាំង 12 បញ្ឈរនៅតាមតំបន់ប្រផុតប្រផើយគ្នានៃពហុកោណដែលមានជ្រុង 12 (ដូចរូបភាពទី 6)។



(a) A dodecahedron (b) A rhombic dodecahedron

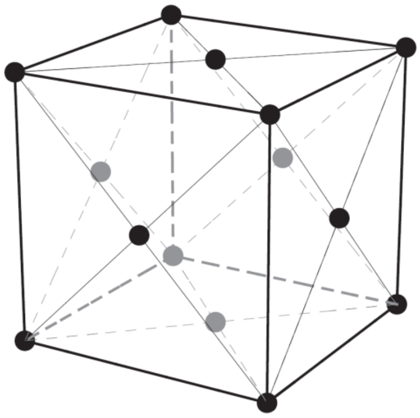
រូបភាពទី 6

វាគ្រាន់តែជាការប៉ាន់ស្មានមួយរបស់ *Fejer Toth* នៅក្នុងទសវត្សរ៍ 1940 ហើយចុងបញ្ចប់បង្ហាញភស្តុតាងដោយសិស្សនិស្សិតមហាវិទ្យាល័យ មិនទាន់បានទទួលសញ្ញាបត្រតែប៉ុណ្ណោះ គឺ *McLaughlin* ក្នុងឆ្នាំ 1999។ បន្ទាប់មក *Voronoi cells* នៃការឲ្យស្វ៊ែរមួយដែលមានកម្រិតមណ្ឌល 12 ជ្រុង វាមានលទ្ធភាពគណនាពីកម្រាស់ស្វ៊ែរខាងក្រៅរបស់ *Voronoi cells*។ វាគឺជាមានកម្រិតទាបសម្រាប់កម្រាស់នៃបណ្តុំផ្លែក្រូចដែលតាំងនៅតាមទីផ្សារ។ ដូច្នេះ តើយើងអាចធ្វើឲ្យបានល្អជាងនេះបានទេ? ចម្លើយគឺ "ទេ" ពីព្រោះវាមិនមានលទ្ធភាពដើម្បីបំពេញលំហជាមួយនឹងការគ្មានការត្រួតគ្នារបស់ពហុកោណដែលមាន 12 ជ្រុងនោះទេ។ យើងមានការចាំបាច់ដើម្បីធ្វើឱ្យគ្មានលំហរវាងពួកវានោះ។ ដូច្នេះយើងមើលករណីទំហំទី 3 គឺវាមានការលំបាកច្រើនជាងករណីទី 2 ព្រោះដំណោះស្រាយតំបន់បរមាមិនរួមជាមួយដំណោះស្រាយបរមារួមនោះទេ។ សម្រាប់ដំណោះស្រាយដែលមានរូបធរណីមាត្រ យើងនឹងសិក្សានៅផ្នែកបន្ទាប់ទៀត។ ចំណុចកណ្តាលរបស់ស្វ៊ែរ គឺជាលំហនៅមុខនៃគូប។ ទំនាក់ទំនង *Voronoi cells* គឺជាពហុកោណ ដែលមាន 12 ជ្រុង (មើលរូបភាពទី 6) គំនូរនេះប្រតិបត្តិនៅក្នុងផលិតសាស្ត្រ។

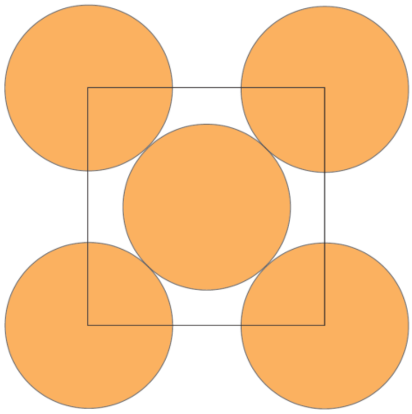
ដំណោះស្រាយបរមាកម្មនៃបណ្តុំផ្លែក្រូចទទួលបានលទ្ធផលដោយ *Thomas Hales* ជាមួយនិស្សិតគ្មានសញ្ញាបត្ររបស់គាត់នៅសកលវិទ្យាល័យ *Samuel Ferguson* ក្នុងឆ្នាំ 1998 (ដំណោះស្រាយពេញលេញបង្ហាញជាសាធារណៈនៅឆ្នាំ 2006) ដំណោះស្រាយនោះ គឺមានម៉ាស៊ីនកុំព្យូទ័រជំនួយវាគឺជាកម្លាំងកំសាន្តមួយ ក្នុងកំឡុងពេលដែលយើងមិនអាចធ្វើដំណោះស្រាយគ្រាប់តាមបាននៃករណីទាំងពីរនេះ។ ដំណោះស្រាយកើតឡើងដោយបំបែកលំហក្នុងតំបន់នៃចំនួនកំណត់របស់ផ្នែកមួយនៃការគិតលើកម្រាស់នៃតំបន់នីមួយៗ។ កម្មវិធីគឺអាចប្រើការបាននៅគេហទំព័រសម្រាប់អ្នកសិក្សា ឬឆែកមើល។

៣.២ ធរណីមាត្រសាស្រ្តនៃការខ្ចប់

គំនូរដ៏វិចិត្រនៃលំហជាមួយគូប ឥឡូវសម្រាប់គូបនីមួយៗ យើងដាក់ស្វ៊ែរត្រង់ចំណុចកណ្តាលមុខបញ្ឈរនីមួយៗ យើងដាក់ស្វ៊ែរមួយនៅចំកណ្តាលនៃមុខរបស់វា (ដូចក្នុងរូបភាពទី 7)



(a)

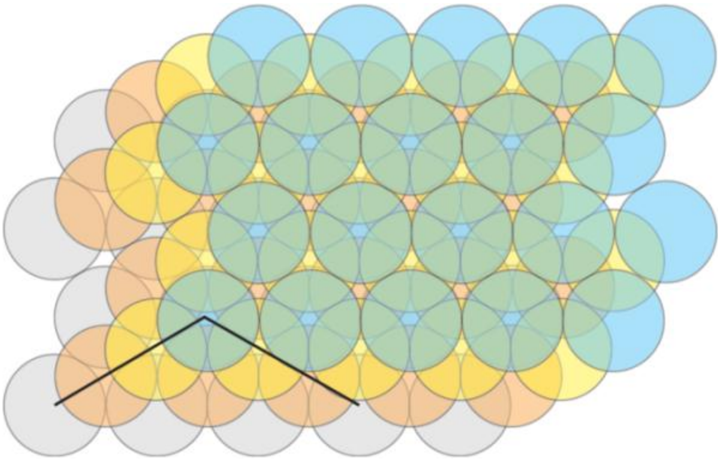


(b) The view of the cut spheres by the plane of one face

រូបភាពទី 7

យើងយកកាំស្វ៊ែរឱ្យធំតាមដែលអាចធ្វើបាន ដូច្នេះស្វ៊ែរមិនចែកជាចំណែកទេ។ បើ a គឺជាប្រវែងទ្រនុងរបស់គូបនោះវានឹងច្បាស់ដូចក្នុងរូបភាពទី 7 (*b*) នោះកាំរបស់បាល់គួរតែ $r=\frac{a\sqrt{2}}{4}$ ។ ចាប់ពីពេលនេះយើងអាចគណនាកម្រាស់របស់ស្វ៊ែរបាន។ តាមពិតសម្រាប់ស្វ៊ែរនៅចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុងបញ្ឈរពី 1 ដល់ 8 នៃស្វ៊ែរគឺជាជ្រុងទ្រេតខាងក្នុងនៃគូប។ តាំងពីពេលដែលមានជ្រុងបញ្ឈរ 8 គឺយើងបន្ថែមទៅលើតម្លៃនៃស្វ៊ែរមួយ។ សម្រាប់ស្វ៊ែរនីមួយៗដែលនៅចំកណ្តាលពីមុខពាក់កណ្តាលនៃជ្រុងទ្រេតរបស់គូប តាំងពីពេលដែលមានមុខ 6 វាបានបន្ថែមទៅលើតម្លៃនៃស្វ៊ែរបីទៀត។ តម្លៃនៃស្វ៊ែរនីមួយៗគឺ $V_1=\frac{4}{3}\pi r^3$ ហើយវាគឺជាតម្លៃនៃគូប $V_2=a^3=16\sqrt{2}r^3$ ដូច្នេះ កម្រាស់របស់ស្វ៊ែរគឺ $V_3=\frac{4V_1}{v_2}=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}=0.7405$ តើលទ្ធផលសម្រេចនៃបណ្តុំផ្លែក្រូចនោះគឺជាអ្វី? ដូចគ្នាដែលយើងដាក់ផ្លែក្រូចជាគំនរយ៉ាងច្រើននោះ។ យើងដាក់ទ្រនាប់ទីមួយនៅលើផ្ទៃរាបនៃស្វ៊ែរ (ដូចរូបភាពទី 2*b*)។ ផ្នែកខាងលើយើងដាក់ទ្រនាប់ទី 2 ជាមួយនឹងការផ្លាស់ប្តូរទិសដៅសម្រាប់ការដាក់ស្វ៊ែរនៅទិសដៅផ្នែកដែលខ្ពស់ជាងខាងស្តាំ។ គំនរទ្រនាប់ទី 3 ដាក់ខាងលើទ្រនាប់ទី 2 ជាមួយនឹងការផ្លាស់ប្តូរទិដៅដូចគ្នា-ល-។ តើអាចយកសំនួរមួយនេះដើម្បីផ្លាស់ប្តូរទិសដៅរវាងភាពផ្សេងគ្នានៃការមិនផ្លាស់ប្តូរកម្រាស់បានទេ?

ចម្លើយ គឺបាន ប៉ុន្តែទំនាក់ទំនងបន្ទះនៃចំណុចកណ្ដាលមិនក្លាយជាគូបមានមុខកណ្ដាលមួយទេ។ មានន័យថា បណ្ដុំរបស់ស្វ៊ែរបានឱ្យជាកម្រាស់ខ្ពស់បំផុតនោះ គឺមិនមែនមានតែមួយនោះទេ។ វាមិនជាក់ស្ដែងទេថា ជាធម្មតា បណ្ដុំនៃផ្លែក្រូចវាមានទំនាក់ទំនងមុខរបស់គូបនោះ ជាការពិតណាស់ ចូរមើលរូបភាពទី 7(*b*) យើងឃើញថា យើងគួរតែមានបន្ទាត់កែងមួយនៃការតម្រង់ជួរកណ្ដាលរបស់ស្វ៊ែរ។ វាជាលំហាត់ល្អមួយនៃការធ្វើឲ្យមើលឃើញរូបភាពនៃបន្ទាត់ទាំងនេះធ្វើឱ្យមាននៅការបណ្ដុំផ្លែក្រូចធម្មតាប៉ុន្តែមួយក្នុងចំណោមពួកវាគឺទ្រេតក្នុងបន្ទាត់ដេក។ តាមពិតផ្ទៃវាបក្នុងរូបភាពទី 2(*b*) គឺជាបន្ទះប្លង់មួយដែលកាត់ចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងបញ្ឈរទាំងបីនៃគូប (រូបភាពទី 7(*a*)។ ក្នុងរូបភាពទី 8 យើងនឹងឃើញសញ្ញាណនៃទ្រនាប់បន្ទះស្វ៊ែរបួន ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី 2(*b*) មួយត្រួតនៅលើមួយផ្សេងទៀត បន្ទាត់ពីរកាត់ចំណុចកណ្ដាលនៃស្វ៊ែរហើយកែង។ រូបភាពទី 8 គឺទ្រនាប់ទីបួននៃស្វ៊ែររបស់ផ្នែកនៃរូបភាពទី 2(*b*) មួយនៅលើមួយផ្សេងទៀត ហើយមានបន្ទាត់ពីរកែងត្រង់ចំណុចកណ្ដាលនៃស្វ៊ែរ។



រូបភាពទី 8

៤. ការបើកចំហរព្រំដែន (ជួរដេក)

៤.១ ការអនុវត្តន៍នៅក្នុងផលិតសាស្ត្រ

សំនួរនៃកម្រាស់របស់ស្វ៊ែរ ត្រូវបានសួរទៅ *Johannes Kepler* ដោយ *Thomas Harriot* នៅចុងសតវត្សទី 16 វាជាពេលត្រឹមត្រូវហើយដែល *Harriot* ជឿនៅក្នុងការស្ថិតនៅរបស់អាតូម ហើយបានចាប់អារម្មណ៍ថាត្រូវធ្វើយ៉ាងដូចម្ដេចដើម្បីរៀបចំឱ្យជុំវិញបញ្ហានីមួយៗ។ នៅពេលដែលមានការរៀបចំត្រឹមត្រូវរបស់អាតូមក្នុងសំភារៈប្រើប្រាស់ហើយនោះ គឺជាការទៀងទាត់មួយដែលអ្នកគីមីវិទ្យានិយាយថា សំភារៈទាំងអស់គឺជាការកែច្នៃមួយ។ សំភារៈធ្ងន់ដូចជាសារធាតុធ្ងន់តែងតែមានការផ្សំឡើងដោយអាតូមដែលនៅត្រង់ចំណុចកណ្ដាលនៃគូបអញ្ចឹងដែរ។ កម្រាស់តិចតួចផ្សេងទៀតមានការរៀបចំយ៉ាងទៀងទាត់ឱ្យស្ថិតនៅផងដែរ។ មួយក្នុងចំណោមកម្រាស់ស្វ៊ែរតិចតួចទាំងឡាយគឺជាបណ្ដុំគូបធម្មតាដែលអាតូមគឺជាអ្នកគ្រប់គ្រងនៅផ្នែកបញ្ឈរនៃគូប។ វាមានតែមួយគត់នៃវត្ថុគីមីងាយៗជាមួយនឹងរូបសណ្ឋាននៃអាតូម ត្រូវបានគេដាក់ឈ្មោះ *polonium* (លំអិតបន្ថែមនៅផ្នែកទី 4)។

៤.២ ការខ្ចប់ដោយចៃដន្យ

ប្រសិនបើយើងបណ្ដុំផ្លែក្រូចជាគំនរយ៉ាងធំដោយប្រុងប្រយ័ត្ននៅត្រង់ចំណុចកណ្ដាលនៃគូប នោះបន្ទះគំនូរ (បញ្ជាក់ពីខាងលើ) បន្ទាប់មក អ្នកទទួលបានកម្រាស់ $p_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.7405$ ប៉ុន្តែប្រសិនបើយើងប្រញាប់

ប្រញាល់ នោះអ្នកបាត់បង់ពួកវាយ៉ាងឆាប់រហ័សនៅក្នុងប្រអប់។ តើអ្នកទទួលបានកម្រាស់អ្វីទៅ? នេះគេហៅថា ការខ្ចប់ដោយចៃដន្យ (*Random Packing*) ជាការពិតកម្រាស់មិនតែងតែដូចគ្នានោះទេ។ ពិតប្រាកដ ប្រសិនបើធ្វើឲ្យញ័រ ឬអង្រួនប្រអប់ អ្នកនឹងធ្វើឲ្យកម្រាស់ធំជាងមុន។ ប៉ុន្តែ តើវាអាស្រ័យលើចំណុចអ្វី? ការពិសោធន៍បង្ហាញថា កម្រាស់ប្រែប្រួលប្រហែល 55% (ការខ្ចប់ដោយចៃដន្យមានភាពរលុង) តម្លៃដែលធំបំផុតគឺ 63.4% (ការខ្ចប់ដោយចៃដន្យមានភាពជិតគ្នា) ដេរីវេនៃតម្លៃលីមីតធំបំផុតគឺមុខវិជ្ជានៃការណែនាំធម្មជាតិមួយក្នុងឆ្នាំ 2008 ដោយ *Song, Wang* និង *Maske* [3]។

៤.៣ ការខ្ចប់វត្ថុផ្សេងទៀតបន្ទាប់ពីស្វ៊ែរ

វាអាចធ្វើបានដើម្បីរកកម្រាស់មួយដែលខ្ពស់ជាង p_3 ប្រសិនបើយើងផ្លាស់ប្តូរវត្ថុដូចគ្នាបេះបិទពីស្វ៊ែរទៅអេលីបក្រដាស់ទីមួយបង្ហាញថា កម្រាស់នៃការផ្តុំជិតគ្នានៃស្វ៊ែរជាមួយទិដ្ឋភាពដូច M&M អាចខិតជិត 0.68 ទៅ 0.71 ហើយកម្រាស់អេលីបជាមួយទិដ្ឋភាពផ្សេងទៀតខិតជិត 0.74។ កម្រាស់នៃការខ្ចប់ដោយចៃដន្យ វាមានសារៈសំខាន់សម្រាប់ឧស្សាហកម្មនៅពេលដែលបណ្តុំនៃវត្ថុដែលដូចគ្នាបេះបិទ គឺស្វ័យប្រវត្តិតែម្តង ជាពិសេសកំហាប់អាចប្រែប្រួលកំឡុងពេលដែលវាកំពុងផ្ទេរ។

៤.៤ ពាក្យសំដីលើវិមាត្រដែលខ្ពស់ជាងមុន

នៅក្នុងទំហំខ្នាត់ខ្ពស់ កម្រាស់មិនប្រែប្រួលនៃស្វ៊ែរត្រូវបានគេស្គាល់ជាទំហំលេខ 8 ហើយមានតិចតួចណាស់ត្រូវបានការអនុវត្តន៍មួយក្នុងចំណោមបណ្តុំនៃខ្នាត់ស្វ៊ែរ គឺជាផលិតផលនៃការកែតម្រូវលេខកូដខុស។ គោលការណ៍នៃការកែតម្រូវលេខកូដខុស គឺជាអក្សរកូដនៅចុងគេ ឬពាក្យបង្ហាញដោយស៊ីតនៃសញ្ញា ត្រូវបានគេហៅថា ពាក្យកូដ (*Code Words*) ដែលប្លែកពីកូដផ្សេងទៀតដែលមាននិមិត្តសញ្ញា $2r$ បន្ទាប់មកបើវាតិចជាង r គឺវាខុសក្នុងការផ្លាស់ប្តូរពាក្យកូដ។ កូដនេះវាស្ថិតនៅចម្ងាយតិចជាង r ចាប់ពីទទួលពាក្យទៅ ហើយការកែតម្រូវគឺអាចធ្វើទៅបាន។ ក្នុងការកែតម្រូវលេខកូដខុសដោយប្រើបណ្តុំស្វ៊ែរ យើងបញ្ជូនអក្សរកូដទៅក្នុងការតាងជាស៊ីតនៃចំណុចកណ្តាលនៃការមិនត្រួតរបស់ស្វ៊ែរ។ ប្រសិនបើស្វ៊ែរមានកាំ r បន្ទាប់មកវាអាចកែតម្រូវតិចជាង r។

៤.៥ សំនួរបន្ទាប់...

វាគឺជាការត្រឡប់សួររបស់អ្នកទៅពួកគេ ដូចដែលអ្នកធ្លាប់បានឃើញវា មានសំនួរជាច្រើនជាមួយ និងការអនុវត្តដ៏សំខាន់ ហើយមានចម្លើយយ៉ាងត្រឹមត្រូវ គឺជាការបោះពុម្ពនៅក្នុងសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រជាច្រើន ដូចជាវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិភាគនៃគណិតវិទ្យា។

៥. សុពលភាពនៃការប្រើម៉ាស៊ីនដើម្បីជួយដោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយកម្រាស់របស់ថាសក្នុងករណីទី 2 គឺ $p_2 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ បង្ហាញថា គឺជាដំណោះស្រាយត្រឹមត្រូវមួយសម្រាប់លទ្ធផលដែលមាននៅក្នុងសំណុំកំណត់មួយនៃការវិភាគ វាគឺជាដំណោះស្រាយសម្រាប់អ្នកមួយចំនួនពិនិត្យមើល ប៉ុន្តែ តើអ្នកណាអាចពិនិត្យចម្លើយថា $p_3 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$? វាជាដំណោះស្រាយ ធំសំបើមមួយជាមួយ 5000 ករណីដើម្បីវិភាគ ហើយករណីនីមួយៗ គឺស្មុគស្មាញ វាត្រូវការគណនាដោយម៉ាស៊ីនកុំព្យូទ័រ សម្រាប់ទូទាត់ *3Gigabytes* នៃលេខកូដកុំព្យូទ័រ។ ជាការពិតណាស់លេខកូដគឺប្រើជាសាធារណៈ ប៉ុន្តែវាច្រើនជាង 70 ឆ្នាំដើម្បី

ឱ្យអ្នកច្នៃប្រឌិតផលិតវា។ ដូច្នេះតើអ្នកណាមានទាំងពេលវេលា និងជំនាញដើម្បីឆ្លងកាត់រឿងទាំងនេះ? សម្រាប់ការផ្ទៀងផ្ទាត់ គឺមានយុទ្ធសាស្ត្រដើម្បីបង្រួមឲ្យមានការខុសតិចតួចបំផុតហើយ *Hales* និង *Solomon* បានប្រើពេលជាង 70 ឆ្នាំដើម្បីស្រាវជ្រាវដូចគ្នា។ កម្មវិធីគួរតែដំណើការនៅក្នុងកុំព្យូទ័រផ្សេងគ្នាជាមួយអ្នកប្រើប្រាស់ និងអ្នកចងក្រងផ្សេងគ្នាដែរ។ លទ្ធផលគួរតែអាចប្រើ *Software* ចាស់ៗដែលបានសាកល្បងជាច្រើនឆ្នាំ។ ព្រឹត្តិការណ៍បន្ទាប់ គឺមានដំណោះស្រាយត្រួតពិនិត្យ និងវាគឺជាការវិនិច្ឆ័យរបស់អ្នកប្រើប្រាស់ជាច្រើនសម្រាប់ទំនាក់ទំនងវិទ្យាសាស្ត្រទៅនឹងការទទួលយកដំណោះស្រាយមួយ។ ក្នុងករណីនេះដំណោះស្រាយប៉ាន់ស្មានរបស់ *Kepler* និងដំណោះស្រាយសង្ខេបចុងក្រោយក្នុងឆ្នាំ 2005 ក្នុងការវិភាគនៃគណិតវិទ្យាមួយក្នុងចំណោមទស្សនាវដ្តីគណិតវិទ្យាដ៏ល្អបំផុត ប៉ុន្តែទំនាក់ទំនងគណិតវិទ្យាគឺនៅតែមានក្នុងការស្រាវជ្រាវសម្រាប់ដំណោះស្រាយគណិតវទ្យា។ ក្នុងពេលស្របគ្នាគណិតវិទូ និងអ្នកស្រាវជ្រាវនៅក្នុងទ្រឹស្តីកុំព្យូទ័រវិទ្យាសាស្ត្រមើលទៅជាដំណោះស្រាយធម្មតា។ ឧទាហរណ៍ៈ ដំណោះស្រាយនៅក្នុងជំហាននីមួយៗ អាចពិនិត្យដោយកុំព្យូទ័រ។ សម្រាប់គោលបំណងនៃគំរោង *Flyspeck* គឺដើម្បីបង្កើតដំណោះស្រាយធម្មតានៃការប៉ាន់ស្មានរបស់ *Kepler* ។

ឯកសារយោង

[1] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Tarquato and P.M. Chikin, *Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids*, Science, **303** (2004), 990–993.

[2] T. Hales, *Cannonballs and honeycombs*, Notices of the American Mathematical Society, **47** (2000), 440–449.

[3] C. Song, P. Wang and H.A. Maske, *A phase diagram for jammed matter*, Nature, **453** (2008), 629–-632.

[4] G.C. Szpiro, *Kepler's conjecture*, John Wiley & Sons, Inc., 2003.