التناظر خطوةً خطوةً

الكاتبة الأصلية : آن كاناس دا سيلفا Ane Cannas da Silva

ترجمة : إيمان لكميتي

التناظر سحر دائم، وقد خدم الجنس البشري في الهندسة المعمارية، والفنون، والهندسة والعلوم. خلال آلاف السنين، استخدمت أنماط التناظر لابتداع أنواع النسيج، والسِلال وتزيين الأرضيات، وورق الجدران وورق التغليف، إلخ. وفي نهاية القرن التاسع عشر برهن الرياضي الروسي، والمتخصص في علم المعادن يفغراف فيودوروف Yevgraf Fyodorov أن هناك 17 نوعا من التناظرات في الأنماط المستوية، انظر المرجع [WPG]. وهكذا يمكننا الحصول بالضبط على 17 نوعا مختلفا من الورق الجداري من حيث النسخ في التناظر، وليس أكثر. والجدير بالذكر أن كل هذه الأنواع من التناظرات يمكن إيجادها في الفن الزخرفي منذ القِدَم.

لقد تم البرهان على وجود الــ17 نوعا بطريقة هندسية باستعمال جمع الكسور والقليل من الطبولوجيا خلال ثمانينيات القرن العشرين. واكتشف هذا التفسير بيل ثورستون Bill Thurston ونشره على نطاق واسع جون هــ. كونوي John H. Conway. وكان كونوي قد ابتكر مصطلحات تعبر عن أفكار ثورستون فصنف مظاهر التناظرات إلى أربعة أنواع : المِشكال kaleidoscope، التَدْوِيم gyration، المعجزة، الأعجوبة wonder. هذا ما سوف نوجز وصفه في القسم الأول.

انظر تصويب مارستون كوندر Marston Conder *في نهاية المقالة.*

فضلا عن المصطلحات التي أدخلها كونوي على هذه التناظرات فقد أتى برموز تساعد الذاكرة، وهي : *، أشْكال، O، ×. وهكذا فكل نوع من التناظرات صار مرتبطا، حسب كونوي وثورستون، بتوقيع رمزي (رموز تحدّد نوع التناظر). والملاحظ أن هذه الرموز تعتبر أكثر وضوحا من الناحية الإعلامية وأكثر جاذبية من تلك المتداولة منذ القديم في مجال البلورات.

سنتناول تصنيف التناظرات على طريقة ثورستون وكونوي في القسم الثاني من هذه المقالة، وذلك باستخدام أدوات حسابية بسيطة. وسنختم مقالتنا في القسم الثالث منها بدراسة تناظر بعض بلاطات الأرصفة

البرتغالية وإحدى جَوَاد (ممرات) مدينة ريو دي جانيرو Rio de Janeiro (وسط الشكل1) والتي ربما تكون أشهر مثال عالمي.

الشكل1: رصيف في بيليم Belém (لشبونة)/ كوباكابانا Copacabana (ريو دي جانيرو) / روسيو Rossio (لشبونة)

1. مظاهر التناظرات

- حالة التناظر المسمى مِشْكَالا تشير إلى وجود تناظر انعكاسي (محوري)، ولديه رمز النجمة *. مثلا، فالكرسي العادي لديه فقط تناظر انعكاسي بسبب المستوي المنصف. ومن ثمّ فتوقيع تناظره هو*. عندما تتقاطع مرايا، كما هو الحال في المشكال فإننا نشير هنا أيضا إلى عدد المرايا التي تتقاطع في كل نقطة. مثال ذلك : الرصيف الشبكي المعروض في الشكل 2 كما لو تعلق الأمر بورقة شبكية محفوظة بعد إجراء عدة انعكاسات. دعنا نركز على قطاع مثلثي محدود بثلاث مرايا (ثُمُن مربع)، وهو ما يسمى بالميدان (أو الشكل) الأساسي. إذا تخيلنا أنفسنا داخل هذا المثلث الأساسي محاطين بهذه المرايا الثلاث، يمكننا رؤية كل الرصيف يعيد نفسه لانهائيًا. عندما نريد تمييز هذه التناظرات يجب أن نحدد زوايا هذا المثلث، أو بالأحرى، تحديد عدد المرايا المتقاطعة في كل رأس. هناك أربع مرايا تتقاطع في منتصف مربع، وأربع مرايا متقاطعة في كل رأس، ومرآتان تتقاطعان في منتصف كل ضلع. ولذلك فتوقيع هذا التناظر هو 2 4 4 *.

الشكل 2. رصيف في شارع غاريت بلشبونة (سيادو Chiado) بتوقيع 2 4 4 *

- تناظر "التدويم" ليس تناظرا إنعكاسيا (محوريا) بل يتميّز (بالحد الأدنى الموجب) لزاوية دوران تمثل جزءًا من 360 درجة. فعلى سبيل المثال، الرصيف في الشكل 3 محفوظ بالدوران. فأي مركز لدورانه

يعادل واحدة من الثلاثة مراكز الموضحة في الـــشكل، والمعرفـــة بزوايـــاه : $\frac{360}{4}$، و $\frac{360}{4}$، و $\frac{360}{2}$.

والتوقيع الموافق لها يتألف من مقامات الكسور : 2 4 4.

الشكل 3: رصيف في ساحة رستورادورس Restauradores بلشبونة، بتوقيع 2 4 4.

- التناظر المسمى "المعجزة" يُعَبَّر عنه بواسطة رمز الضرب ×، ويظهر عندما لا يقطع المسار المنطلق من النموذج إلى صورته أية مرآة.

الشكل 4: رصيف من أربعة ألوان قرب موستيرو دوس جيرونيموس Mosteiro dos Jeronimos بلشبونة، توقيعه هو××.

- التناظر المسمى "الأعجوبة" والذي نرمز إليه بـــ O يظهر عندما لا يبرز النمط أيًا من الأنواع الـــسابقة الذكر. مثال ذلك : الرصيف المعروض في الشكل 5 صُمِّم بالتكرار الأفقي والعمودي للنمط المستخرج من رصيف ساحة رستورادورس، فهو لا يبدي أي مظهر من المظاهر السابقة. ومن ثمّ فتوقيعه هو O.

الشكل 5: رصيف من نسج الخيال، توقيعه هو O.

2. الأنماط في المستوي

يمكن للاقتباس أن يساعدنا في إيجاد الــ17 نمطا معبرين عنها بواسطة التوقيعات. لنتخيّــل أن مطعــم "**التناظر**" يعرض قائمة الطعام التالية:

طبق اليوم	الثمن	الدمج (2، 4،3،...)
O	2	-
*	1	-
عدد N	$\frac{N-1}{N}$	$\frac{N-1}{2N}$
×	1	-

علما أن المطعم يوفّر تخفيضا 50 % (الدمج) عندما تعرض على يمين العلامة * . مثال ذلك، 3 بـــسعر $2/3$ يورو بينما الدمج 3 * يكلف فقط $1/3+1=4/3$ يورو.

دعنا نتصور أن في الأوقات الصعبة تكون ميزانية وجبة الغداء 2 يورو لا أكثر. ماذا يمكن أن نأخذ في وجبة بصرف كل الميزانية؟ فالخيار 2 4 4 * مثلا يكلف $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+1=2$ يورو، وكذا الخيار ×22 حيث أن $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$.

النظرية السحرية للمستويات: أنواع ألأنماط في المستويات تكافئ توفيقات الرموز التي تكلفتهـــا الإجماليـــة تساوي بالضبط 2.

ما هي أنواع الأنماط ومن أين أتت النظرية السحرية؟

باستخدام النظرية السحرية فإن الإجابة عن السؤال الأول ستكون بمثابة تمرين. والملاحظ أنه في غياب النجوم "*" فإن كل رقم يُقدَّر على الأقل بنصف، وذلك الرقم هو دوما أقل من 1. وبالتـــالي فالقائمـــة الأولـــى للتوقيعات بدون نجوم هي:

632 ، 442 ، 333 ، 2222 ، ×× ، ×22 ، **O** .

في الواقع، بافتراض أن a ، b ،...، c تمثل أرقاما فإن الدمج $a\,b\ldots c$* يُقَدَّر بـــ 2 عندما تُقَدَّر $a\,b\ldots c$ بـــ 2. ومن ثمّ فالقائمة السابقة هي بمثابة أصل قائمة التوقيعات المرتبطة بها والتي تبدأ بـــ *:

632 * ، 442 * ، 333 * ، 2222 * ، × * ، * * .

إذا تمكنتم من جمع كسور فباستطاعتكم الحصول على قائمة بتوقيعات مختلطة:

4 * 2 ، 3 * 3 ، 2 2 * 2 ، * 2 2.

وهكذا اكتشفنا أنه يوجد على الأكثر 17 نوعا من هذه الأنماط.

وفيما يخص السؤال الثاني نحيل القارئ إلى نص المرجع [NOS] من أجل اكتشاف أصل النظرية السحرية. يحتوي الكتاب [CBG] على تحليل أوفى وعلى صور توضيحية رائعة. كما يشرح هذا الكتاب في أية فضاءات توجد الأنماط التي تُقَدَّر بأقل من 2، وتلك التي تكلّف أكثر من 2.

3. رياضيات البلاطة

لقد صُممّ التبليط الحجري البرتغالي خلال القرن 19 كمبادرة لإبقاء السجناء في قلعة ساو جورج Sao Jorge مشغولين. ومنذ ذلك الوقت أصبح هذا الفن بمثابة إبداع بالنسبة لمدينة لشبونة، وهو أسلوب التبليط الأكثر استعمالا في الأرصفة في المناطق التاريخية البرتغالية.

الشكل 6. نمط "أمواج البحر المفتوح" (ondas do mar largo)، توقيعه * 2 2

كان أشهر نمطًا، وهو المسمى ondas do mar largo (أي تقريبا "أمواج البحر المفتوح")، قد استعمل عام 1849 في ساحة الملك بيدرو Pedro الرابع البرتغالية، المعروفة أكثر باسم ساحة روسيو ROSSIO. ثم صُدِّر إلى كوباكابانا Capacabana (البرازيل) في عام 1906 فعرف هناك نجاحا كبيرا. انظر الشكل 1. والطريف أن ملك البرتغال بيدرو الرابع كان أول إمبراطور للبرازيل، وحمل هناك لقب بيدرو الأول.

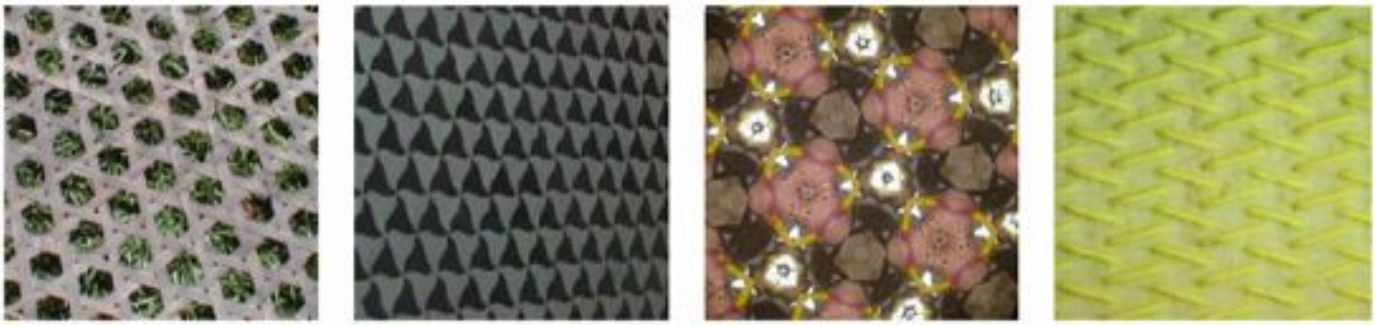
يمكننا في "أمواج البحر المفتوح" إيجاد مرآتين متكافئتين ونوعين (أبيض وأسود) من التدويمات حيث تكون المسافة بين الأمواج أقصر مسافة ممكنة. لذلك فالتوقيع هو * 2 2. انظر الشكل 6.

هل يمكننا إيجاد كل أنواع التناظرات في الأرصفة البرتغالية؟

هناك دراسة أطلقت في لشبونة تبحث في أنواع التناظرات المقدمة في التبليطات الحجرية البرتغالية وتسعى إلى استكمال القائمة. وهكذا عثر على النوع 2* 4 في مدينة غويمارايس Guimaraes. أما الأنماط التالية فلم يعثر لها بَعدُ على أثر:

632 ، 333 ، 333 * ، 22× ، O.

في الوقت الذي نجد النوع **O** ممثلا في الشكل 5، نلاحظ أن أربعة أنواع لا زالت تنتظرنا للتعرف على تفاصيلها، وهي الخاصة بأنماط الشكل 7. ثمة المزيد من الأمثلة يمكن الاطلاع عليها في المرجع [PEF].



الشكل7. تفاصيل إسفنجة، صورة مِشكال، طاولة، سلة.

وهي توضح أنواع التناظرات × 2 2 ، 3 3 3 ، 3 3 3 * ، 2 3 6 على التوالي.

نحن نشجع القارئ على إيجاد مثل هذه التناظرات في أرصفة حيّه.

الكاتب يشكر إسهامات الرسائل الإلكترونية التي وصلت من مختلف أنحاء العالم.

4. المراجع

[CBG] Conway, J. H., H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, A K Peters, 2008.

[NOS] Cannas da Silva, A., *Um Novo Olhar Sobre Simetria*, http://www.math.ethz.ch/ ~acannas/Outreach.

[PEF] *Padroes em Falta*, http://www.math.ethz.ch/ ~acannas/Outreach.

[SPP] *Simetria Passo a Passo* - Matem atica nas Cal cadas de Lisboa, http://www.math.ist.utl.pt/simetria.

[WPG] *Wallpaper Group*, http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper group.

Department of Mathematics, ETH Zurich, 8092 Zurich Switzerland e Departamento de Matematica, Instituto Superior Tecnico, 1049-001 Lisboa, Portugal.

عمل مدعوم جزئيا من قبل مؤسسة العلم والتكنولوجيا FCT (البرتغال) ومؤسسة غولبنكيان Gulbenkian (البرتغال) و جواو فيراند Joao Ferrand (صور لشبونة)، و درور بار–ناتان Dror Bar-Natan (صور الشكل 7).

تصويب (بقلم كارستون كوندر Marston Conder ، جامعة أوكلاند Auckland، نيوزلاندا) :

إن أول من أنجز/اكتشف هذه الشروحات لم يكن ثورستون أو كونوي، بل كان موراي ماكبيث Murray Macbeath (A.M. Macbeath)، وحدث ذلك قبل 20 سنة تقريبا، ضمن عمله حول الزمر البلورية crystallographic groups (في سياق أعمق). وقد "أعيد اكتشاف" ملاحظاته من قبل عدد من الأشخاص، من بينهم ثورستون. غير أن ماكبيث له السبق في تقديم الشرح الذي كان جزئيا شرحا جبريا. وقام كونوي بنشره وطور ترميزا جديدا له.

– هذه المقالة متوفرة باللغة الأنجليزية

تقاسم هذا على:

- البريد الإلكتروني
- طباعة
- Facebook
- Twitter

هذا البريد متوفر أيضا بـــ: الانجليزية، الفرنسية، الألمانية، الاسبانية

أرسل الموضوع على شكل PDF | أدخل عنوان البريد الإلكتروني | ابعث

اترك الرد

بريدك الإلكتروني لن ينشر. الحقول المطلوبة مسجلة*

الاسم*

البريد الالكتروني*

الموقع الإلكتروني

تعليق

You may use these HTML tags and attributes: `<a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <strike> <strong>`

تعليق البريد

أدلِ ☐ بتعليقات المتابعة على البريد الإلكتروني.

ابعث ☐ بإرسالات جديدة عبر البريد الإلكتروني.