Wie löse ich diese Gleichung? Betrachten Sie die Symmetrien! – Die Idee hinter Galoistheorie

Timo Leuders

Einführung

Es gibt Fragen, die die Entwicklung der Mathematik über Kulturen und Jahre hinweg begleiten. Eine dieser Fragen ist die folgende: Wie findet man eine unbekannte Größe *x*, von der man einige Beziehungen kennt, wie zum Beispiel – in der heutigen algebraischen Notation – diese:

$$x^2 = x + 5$$

Wie man Lösungen zu solchen quadratischen Gleichungen findet, ist im Grunde bereits seit der babylonischen Zeit bekannt und ist ein Herzstück der Schulmathematik:

$$x^2 - x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{21} \ \vee \ x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{21}$$

Aber wie steht es mit $x^5 = x + 5$, eine Gleichung, die nur wenig anders aussieht? Gibt es dafür auch direkte Wege, die Lösungen zu berechnen? Sehen die Lösung in ähnlicher Weise symmetrisch aus?

Das Streben nach dem Lösen von Gleichungen hat Mathematiker dazu inspiriert, neue Konzepte wie die negativen, reellen oder komplexen Zahlen zu erfinden (manche würden eher sagen: zu entdecken). Doch eine Polynomgleichung wie das zweite Beispiel zu lösen, hat fünfhundert Jahre lang schwerwiegende Probleme aufgeworfen. Warum ist das so schwierig? Lassen Sie uns für einen Moment schummeln und ein Computer Algebra Sysem (CAS) fragen – was natürlich alles nutzt, was über das Lösen von Gleichungen bekannt ist.

```
Solve[x^4 – 5x^2 + 4 == 0, x]
```
$$L = \{-2, -1, 1, 2\}$$

```
Solve[x^4 – 5x^2 + 3 == 0, x]
```
$$L = \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{13}\right)}, \sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{13}\right)}, -\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{13}\right)}, \sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{13}\right)}\right\}$$

```
Solve[x^4 – 5x + 1 == 0, x]
```
$$L = \left\{1, \frac{1}{3}\left(-1 - 2\left(\frac{2}{115+3\sqrt{1473}}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\left(115+3\sqrt{1473}\right)\right)^{1/3}\right),\right.$$
$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{115+3\sqrt{1473}}\right)^{1/3} - \frac{1}{6}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(115+3\sqrt{1473}\right)\right)^{1/3},$$
$$\left.-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{115+3\sqrt{1473}}\right)^{1/3} - \frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(115+3\sqrt{1473}\right)\right)^{1/3}\right\}$$

Schließlich: Für `Solve[x^5 + x + 5 == 0, x]` gibt das CAS auf und wirft keine Lösung aus.

Was ist da los? Wieso führt so eine scheinbar kleine Änderung der Gleichung zu so schwerwiegenden Problemen bei der Darstellung der Lösung? Welches ist die Struktur der Gleichung, die letztendlich über die Existenz oder die Komplexität einer Lösung entscheidet? Die Antwort auf diese Fragen ist: Es liegt alles an der Symmetrie der Gleichung! Aber was genau ist die Symmetrie einer Gleichung?

Die geschichtlichen Versuche, ein generelles Lösungsschema für Polynomgleichungen zu finden, haben schließlich zu einer Wandlung von der klassischen Algebra (als die Kunst des Lösens von Gleichungen) hin zur modernen Algebra (als die Analysis von Struktur und Symmetrie) geführt. Ein Höhepunkt in dieser Entwicklung war die Arbeit von Évariste Galois (1811-1832). Dieser kurze Text ist der Versuch einer weniger technischen Wiedergabe von Galois' Ideen, und will mithilfe von Beispielen erklären, was es bedeutet, beim Versuch, Gleichungen zu lösen die „Struktur und Symmetrie" zu betrachten.

Was ist die Symmetrie einer Gleichung?

Wenn man die Lösungen einer quadratischen Gleichung wie

$$x^2+2x+3=0, \quad x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-3}=-1\pm i\sqrt{2}$$

betrachtet, so kann man eine gewisse Symmetrie in Hinblick auf den Term $i\sqrt{2}$ erkennen. Man bemerkt, dass dieser Term keine rationale Zahl mehr darstellt, obwohl es die Koeffizienten der Gleichung sind. $i\sqrt{2}$ muss sozusagen zusätzlich zu den rein rationalen Zahlen geschaffen werden, um eine Lösung niederschreiben zu können. (In modernen Worten nennt man das eine Körpererweiterung $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$).

Die Symmetrie der Lösungen kann aber auch aufgeschrieben werden, ohne explizit diese zusätzlichen Zahlen zu nutzen, indem man einfach die folgenden rationalen Beziehungen angibt (also Gleichungen, die nur aus rationalen Zahlen und rationalen Operationen bestehen):

$$x_1+x_2=-2, \quad x_1\cdot x_2=3$$

Diese Beziehungen verbinden die Lösungen auf symmetrischen Weise: Das Tauschen der beiden Lösungen x_1 und x_2 (wofür wir die Notation $1\leftrightarrow 2$ oder kürzer und mathematischer (12) verwenden werden) erhält diese Beziehungen. Diese Art von Spiegelsymmetrie wird durch die folgende Figur wiedergegeben:

Die Betrachtung einer anderen Gleichung liefert eine andere Situation:

$$x^2+4x-5=0, \quad x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-(-5)}=-2\pm 3$$

Die Lösungen benötigen nun keine zusätzlichen Zahl und erlauben weitere rationale Beziehungen zwischen den Lösungen, zum Beispiel

$$5x_1+x_2=0\,,\ x_1-1=0\,,\ x_2+5=0\,.$$

Diese Beziehungen führen zu einer Situation mit geringerer Symmetrie zwischen den Lösungen (man kann dies eine „teilweise Symmetriebrechung“ nennen): Die Beziehungen bleiben bei Vertauschung von x_1 und x_2 nicht erhalten. Die folgende Figur leidet unter eben dieser Symmetriebrechung. Die zwei unterschiedlichen Kreise (einer einfach, einer doppelt) zeigen, dass die Lösungen nicht vertauschbar sind.

All dies mag eher trivial erscheinen und es ist immer noch schwer zu erkennen, wie diese Perspektive der Symmetrie dabei helfen kann, die Lösungsprinzipien *beliebiger* Polynomgleichungen zu verstehen. Dies wird erst offensichtlicher, wenn wir uns einem weniger trivialen Fall zuwenden. Aus diesem Grund werden wir einen spezielleren Typ von Gleichungen vierten Grades betrachten, die sogenannten biquadratischen Gleichungen (einerseits sind sie einfach genug, um nur mit Schulmathematik gelöst zu werden, sogar ohne komplexe Zahlen, andererseits zeigen sie ein reichhaltiges Verhalten in Bezug auf die Symmetrie).

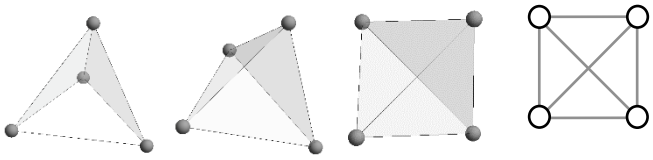
Betrachten Sie zunächst die allgemeine biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^2 + b = 0 \ .$$

Durch Ausmultiplizieren von $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = 0$ kann man erkennen, dass die vier Lösungen notwendigerweise die folgenden Beziehungen erfüllen:

$$x_1x_2x_3x_4 = b$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ .$$

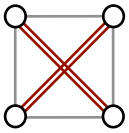
Diese vier Gleichungen sind in Bezug auf jede beliebige Permutation der vier Lösungen symmetrisch. Diese Symmetrie ist identisch mit der symmetrischen Gruppe des Tetraedees, welche aus allen Drehungen und Spiegelungen besteht. (Für die folgende Analyse ist es nützlich, den Tetraeder in eine etwas unübliche Position zu drehen, sodass man auf eine Kante schaut).



Aber die biquadratische Gleichung hat eine zusätzliche Struktur, weil die Lösungen in zwei Paare angeordnet werden können. Betrachten Sie als Beispiel die folgende konkrete Gleichung, in der x_1 mit x_2 gepaart wird und x_3 mit x_4.

$$x^4 - 6x^2 + 2 = 0 \;,\; x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \;,\; x_3 + x_4 = 0$$



Diese Beziehungen bleiben unter Permutationen erhalten, die die Paare „respektieren“, zum Beispiel 1↔2 oder 3↔4 oder (1↔2 & 3↔4), aber auch (1↔3 & 2↔4), (1↔4 & 2↔3), (1→3→2→4→1) oder (1→4→2→3→1). In mathematischer Kurzschreibweise kann dies auch wie folgt geschrieben werden: (12),(34), (12)(34),(13)(24), (14)(23), (1324) und (1423). Die Figur neben der Gleichung stellt ebendiese Situation dar: Die Verbindung gegenüberliegender Eckpunkte reduziert die Symmetrie des vorherigen Tetraeders, indem nur noch solche Rotationen und Reflexionen erlaubt sind, die die Verbindungen erhalten.

Durch Multiplikation der Lösungen

$$x_1 x_3 = \sqrt{3+\sqrt{7}}\sqrt{3-\sqrt{7}} = \sqrt{9-7} = \sqrt{2} \;\text{ oder }\; x_1 x_2 = -\sqrt{3+\sqrt{7}}\sqrt{3+\sqrt{7}} = 3+\sqrt{7}$$

ist es möglich, weitere Beziehungen zu finden:

$$x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0 \;,\; x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \;\text{ oder }\; x_1 x_2 + x_3 x_4 - 6 = 0 \,.$$

Die Gruppe der Permutationen, die *alle* möglichen rationalen Beziehungen zwischen den Lösungen einer Gleichung bewahrt, nennt man die *Galoisgruppe* der Gleichung. Bis zu diesem Punkt hin können wir sicher sein, dass die Galoisgruppe *G* der Gleichung in der Diedergruppe D_4 enthalten ist (ohne dies hier zu beweiswn, sie ist tatsächlich die Diedergruppe)

$G \subseteq \{$ (1), (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423) $\} = D_4$.

Der symmetriebrechende Effekt der Beziehung ist bereits in obigem Tetraeder dargestellt, indem die zwei Kanten markiert sind. Eine Drehung um eine Achse herum durch ein Dreieck wie zum Beispiel (123) ist nicht mehr möglich.

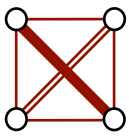
Betrachten wir nun eine andere biquadratische Gleichung. Diesmal verschwinden die „verschachtelten Wurzeln“ aufgrund der speziellen Werte der Koeffizienten:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0 \;\;,\; x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}}} = \pm\sqrt{\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}} \,.$$

Ein paar der rationalen Beziehungen, die diese spezielle Struktur wiedergeben, sind:

$$x_1 + x_2 = 0 \;,\; x_3 + x_4 = 0$$

$$x_{1,2}{}^2 - 3 = 0 \quad x_{3,4}{}^2 - 2 = 0$$

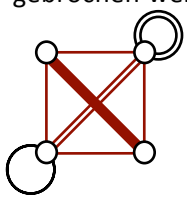


Hier wird die Symmetrie noch weiter gebrochen: Die zwei Paare können nicht gegen einander ausgetauscht werden, weil sie sich gegenseitig ausschließende rationale Beziehungen erfüllen. Daher können wir uns sicher sein, dass die Galoisgruppe *G* der Gleichung in der sogenannten „Kleinschen Vierergruppe“ V_4 enthalten ist.

$G \subseteq \{ (1), (12), (34), (12)(34) \} = V_4$

(Ja, sie wurde tatsächlich nach Felix Klein benannt, der sie zunächst als “Vierergruppe” in einem berühmten Artikel bezeichnet hat, welcher unten zitiert ist). Die Figur zeigt wieder die Symmetriebrechung: Das Eckpunktepaar, das durch die dicke Linie verbunden ist, kann nicht mehr mit dem anderen Paar vertauscht werden.

Mit dem nächsten Schritt kann man sich leicht vorstellen, wie die Symmetrie weiter gebrochen werden kann:



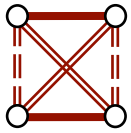
$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 = (x-1)(x+1)(x^2-3),\ x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{1}} = \pm\sqrt{2 \pm 1}$$
$$x_{1,2}{}^2 - 3 = 0 \quad x_3 + 1 = 0 \quad x_4 - 1 = 0.$$

Die Symmetrie wird zu $G \subseteq \{ (1), (12) \} = \mathbb{Z}_2$ reduziert. Analog belässt in der Figur nur ein Paartausch die Figur invariant.

Zwei weniger offensichtliche, aber weitaus interessantere Situationen können auftreten. Die folgende Gleichung

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0\ ,\ x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$$

enthält spezielle Zahlen, die Relationen erlauben, denen wir bisher noch nicht begegnet sind:



$$x_1 x_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1$$
$$x_1 x_3 - 1 = 0\ ,\ x_1 x_4 + 1 = 0\ ,\ \ x_2 x_3 + 1 = 0\ ,\ x_2 x_4 - 1 = 0$$

Diese Beziehungen brechen die Diedersymmetrie einer generellen biquadratischen Gleichung hin zu einer anderen Galoisgruppe, die isomorph zur obigen, aber nicht identisch mit ihr ist

$G \subseteq \{ (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \} \cong V_4$.

Die Figur neben der Gleichung zeigt die gleiche Symmetrie.

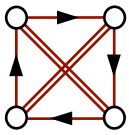
Letztendlich ermöglicht die Konstellation der Parameter in

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0\ ,\ x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$$

eine vertracktere Konstruktion rationaler Relationen zwischen Lösungen:

$$x_1{}^2 - x_1 x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} = (2+\sqrt{2}) - \sqrt{4-2} = 2\,.$$

Die zwei Wurzeln, die sich im letzten Schritt gegenseitig aufheben, stammen aus unterschiedlichen Stufen der Verschachtelung. Die entstehenden Relationen



$$x_1{}^2 + x_1 x_3 - 2 = 0\ ,\ x_3{}^2 - x_3 x_2 - 2 = 0\,, x_2{}^2 - x_2 x_4 - 2 = 0 \text{ or } x_4{}^2 - x_4 x_1 - 2 = 0$$

besitzen zyklische Struktur und reduzieren die Symmetrie hin zu einer zyklischen Gruppe:

$G \subseteq \{ (1), (12)(34), (1324), (1423) \} = \mathbb{Z}_4$.

Um eine analoge Symmetrie im Tetraeder herzustellen, kann man die Symmetrie reduzieren, indem man Pfeile zieht und dadurch nur zyklische Rotationen zwischen den Eckpunkten erlaubt.

Was sagt Symmetrie über die Lösung einer Gleichung aus?

Sie haben sich vielleicht gewundert, inwiefern die Untersuchung der Struktur und der Symmetrie der Lösungen dem Ausgangsproblem der Lösung der Gleichung, hilft. Die Situation ähnelt dem „Lernen durch Einsicht" aus der Gestaltpsychologie: Wenn man den richtigen Weg gefunden hat, ein Problem umzustrukturieren (und damit eine „gute Gestalt" gefunden hat), dann hat man oft bereits den größten Schritt hin zur Lösung bewältigt. Dies gilt hier ebenso, auch wenn dafür noch ein paar Details geklärt werden müssen.

Große Symmetrie ↔ Wenige Relationen ↔ Komplexe Lösungen

Die Beispiele zeigen das folgende qualitative Verhalten: Wenn die Gleichung keine „besonderen Eigenschaften" besitzt, besteht eine perfekte Symmetrie zwischen den Lösungen. Nur total symmetrische Beziehungen wie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ oder $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$ gelten, was bedeutet, dass die Galoisgruppe *alle* Permutationen enthielte. Die allgemeine Gleichung vierten Grades ($x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) weist eine solche maximale Symmetrie auf, was sich dadurch zeigt, dass die Galoisgruppe die komplette symmetrische Gruppe S_4 aller Permutationen ist. Wenn die Gleichung Besonderheiten aufweist, die zu weiteren Beziehungen zwischen den Lösungen führen (wie zum Beispiel $x_1 + x_2 = 0$ in der biquadratischen Gleichung), werden bestimmte Symmetrien gebrochen (wie (13) im Beispiel). Diese Symmetrien verschwinden aus der Galoisgruppe, was sie zu einer Untergruppe von S_4 reduziert (so wie D_4 im Beispiel). Weiterhin: Eine Lösungsformel für eine Gleichung (sofern es eine gibt) ist weniger komplex insofern, als es umso weniger verschachtelte Wurzeln gibt, je kleiner die Symmetrie ist. Dies zeigt, dass die Größe der symmetrischen Gruppe auf irgendeiner Wiese die Komplexität einer potentiellen Lösungsformel misst.

Eine Gleichung Lösen ↔ Wurzeln hinzufügen ↔ Die Galoisgruppe reduzieren

Zum Glück funktioniert dieses qualitative Verhalten auf eine sehr mathematische Art und Weise; es führt zu einem vollständigen Verständnis des Prozesses, wie eine Gleichung gelöst werden kann. Die Lösung einer Gleichung zu finden, kann als eine schrittweise Konstruktion angesehen werden, wobei man mit Wurzeln („Radikalen") immer komplexere Ausdrücke aufbaut. Dieser Prozess heißt „hinzufügen" und läuft letztendlich darauf hinaus, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit Wurzeln von rationalen Zahlen zu erweitern, und dann mit Wurzeln von Wurzeln und so weiter. Dies wird nachfolgend illustriert durch das „Lösen" der Gleichung $x^4 - 6x^2 + 2 = 0$ durch das schrittweise Aufbauen der Lösungen $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$.

In diesem Schritt bekannte Zahlen	**Einige Beziehungen zwischen den Wurzeln**	**Symmetriegruppe (=alle Permutationen, die die Beziehungen erhalten)**
$\mathbb{Q}$ - nur rationale Zahlen	$x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$ $x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0$ $x_1 x_2 + x_3 x_4 - 6 = 0$ und viele mehr	D_4 = { (1), (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423) } - dies ist die Galoisgruppe der Gleichung

Im nächsten Schritt werden wir $\sqrt{7}$ als erste neue Zahl hinzufügen und außerdem rationale Kombinationen erlauben. Dies erweitert den Körper $\mathbb{Q}$ hin zu $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Bei Betrachtung des Zahlenkörpers als „bekannte Zahlen" erscheinen neue Beziehung zwischen den Lösungen. Diese Beziehungen brechen Symmetrien und reduzieren dadurch die symmetrische Gruppe.

$\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ $= \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$	$x_1 x_2 - 3 - \sqrt{7} = 0$ als eine zusätzliche Relation	V_4 = { (1), (12), (34), (12)(34) } - dies ist eine Untergruppe der Galoisgruppe

Dieser Prozess kann fortgesetzt werden. Beim Hinzufügen von $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ wurde *eine* Lösung bereits explizit erreicht. Die Symmetrie in Bezug auf diese Lösung ist komplett gebrochen.

$\mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3+\sqrt{7}})$	$x_1 - \sqrt{3+\sqrt{7}} = 0$ als eine zusätzliche Beziehung	$\mathbb{Z}_2$ = { (1), (34) } - dies ist eine tiefere Untergruppe

In einem letzten Schritt wird die Symmetrie durch Hinzufügen von $\sqrt{3-\sqrt{7}}$ komplett gebrochen, eine totale Reduktion wurde erreicht und jede Lösung wird durch radikale Ausdrücke dargestellt.

$\mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3+\sqrt{7}})(\sqrt{3-\sqrt{7}})$	$x_3 - \sqrt{3-\sqrt{7}} = 0$ als eine zusätzliche Beziehung	E = { (1) } - totale Reduktion ist erreicht

Dieses Beispiel gibt einen Hinweis über die Verbindung zwischen den zentralen Konzepten, die mit der Struktur einer Gleichung verbunden sind. Genaugenomen sind all diese vier Prozesse mehr oder weniger das Gleiche:

1) „Konstruktion von Lösungen einer Gleichung": $\sqrt{7} \to \sqrt{3+\sqrt{7}} \to \sqrt{3-\sqrt{7}}$
2) „Erweiterung des Zahlenkörpers": $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3+\sqrt{7}}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3+\sqrt{7}})(\sqrt{3-\sqrt{7}})$
3) „Reduktion der Symmetrie zwischen Lösungen durch Finden neuer Relationen"
4) „Untergruppen der Galoisgruppe finden": $D_4 \rhd V_4 \rhd \mathbb{Z}_2 \rhd E$

Bemerken Sie die Parallele zwischen der Erweiterung des Zahlenkörpers und der Reduktion der Galoisgruppen?

$$\begin{array}{c} D_4 \rhd V_4 \rhd \mathbb{Z}_2 \rhd E \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3+\sqrt{7}}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3+\sqrt{7}})(\sqrt{3-\sqrt{7}}) . \end{array}$$

Wenn mein einen Schritt weiter geht, erhält man eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen *allen* Teilkörpern (in diesem Fall von $\mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3+\sqrt{7}})(\sqrt{3-\sqrt{7}})$) und *allen* Untergruppen der Galoisgruppe (in diesem Beispiel D_4) – der bekannte „Fundamentalsatz der Galoistheorie".

Kann die Galoistheorie Lösungsformeln liefern?

Diese Frage lassen wir Galois am besten selbst beantworten (obwohl seine Antwort sich eher wie die bekannten Antworten in Radio Eriwan-Witzen anhört: „Im Prinzip ja, aber…"): *„Falls Sie mir jetzt nach Belieben eine algebraische Gleichung stellen und Sie davon wissen möchten, ob sie mithilfe von Radikalen lösbar ist oder nicht, würde ich Ihnen nur die Mittel zeigen, die Sie zum Beantworten der Frage benötigen, denn ich möchte nicht mich selbst oder irgendjemand anderen dazu verurteilen, dies zu tun. In einem Wort: Die Berechnungen sind unpraktisch" (Galois, 1832, S. 39)*. Sie können dies vielleicht nachvollziehen, wenn Sie daran denken, dass Galois' konkreter Lösungsweg für die Lösung einer Gleichung fünften Grades, verlangt, ein Polynom vom Grad 120 zu konstruieren und zu faktorisieren. Dies verwirrte viele von Galois' Zeitgenossen, die auf einen praktikablen Algorithmus gehofft hatten. Sie folgten einfach nicht Galois' radikal neuer Perspektive: Galois hörte auf, nach einem Lösungsalgorithmus für Gleichungen fünften oder höheren Grades zu suchen. Stattdessen formulierte er die Frage um: Was ist die grundlegende Struktur einer Gleichung, die Auskunft über die Möglicheit ihrer Lösung gibt? Er verstand, dass es sich nicht um die Koeffizienten der Gleichung handelte, sondern um die Symmetrie der Lösungen, ausgedrückt durch rationale Beziehungen. Natürlich hat er dabei viele Ideen von Lagrange und Ruffini genutzt, aber im Großen und Ganzen war er derjenige, der den großen Sprung von der klassischen Algebra („Wie löse ich eine Gleichung") hin zu moderner Algebra („Wie lautet die Symmetrie einer Gleichung?") tat.

Nachdem Galois eine solche abstrakte Gleichungstheorie erschaffen hatte, konnte er sie zu einem höheren Zweck nutzen: Seine Theorie konnte beantworten, warum eine Lösung durch Radikale in einem Fall schwierig, aber in einem anderen Fall einfach war. Außerdem konnte sie erklären, warum es manchmal mehr als schwierig war – es war unmöglich!

Dies werden wir als letztes unternehmen: Wir werden den Lösungsprozess aus Sicht der Symmetrie betrachten (also von der Reduktion der Galoisgruppe). Im obigen Beispiel hat in der schrittweisen Reduktion von der Galoisgruppe hin zur trivialen Gruppe $D_4 \triangleright V_4 \triangleright \mathbb{Z}_2 \triangleright E$ jeder Schritt eine „bemerkenswerte Eigenschaft" (wie Galois es nannte): Jede kleinere Gruppe ist eine besondere Art von Untergruppe einer größeren Gruppe (eine „normale Untergruppe") und der Quotient der Gruppengrößen ist immer eine Primzahl (in diesem Fall 8:4:2:1, also immer p=2). Galois stellte fest, dass diese Eigenschaft notwendig und hinreichend dafür ist, die Gleichung durch Radikale zu lösen. Für alle Gleichungen mit Grad 4 oder niedriger kann jede beliebige Gruppe unter Beachtung der „bemerkenswerten Eigenschaft" reduziert werden. Unter den Gleichungen fünften Grades (oder höher) haben die meisten Beispiele keine besonderen Merkmale, und besitzen daher eine große Galoisgruppe (eine große Symmetrie, hohe Komplexität, wenige Relationen zwischen den Lösungen). Die Gleichung $x^5 - 4x + 2 = 0$ zum Beispiel hat die Galois Gruppe S_5 (also alle Permutationen von fünf Elementen) – keine Relation zwischen Lösungen reduziert die Symmetrie – und deshalb würde man auf eine Reduktion wie

$$S_5 \rhd \ldots \rhd \ldots \rhd D_5 \rhd \mathbb{Z}_5 \rhd E$$

hoffen. Diese würde in Bezug auf die Gruppengrößen auf 120 : … : … : 10 : 5 : 1 hinauslaufen. Aber man kann durch Untersuchung der Untergruppe S_5 zeigen, dass es keine solche Sequenz gibt. Daher kann es keine allgemeine Lösung durch Radikale für alle Gleichungen einer gewissen Komplexität geben, und insbesondere gibt es keine allgemeine Formel für Gleichungen fünften oder höheren Grades. Dies war bereits einige Jahre vor Galois bekannt und bewiesen (durch Ruffini und Abel), aber in einer Analyse wie der von Galois ist die Antwort der Lösbarkeit nur noch ein Korollar.

Weiterführende Literatur

Die hier dargestellten Erklärungen der Grundidee der Galoistheorie geben nur einen Einblick in die Bedeutung und die Schönheit einer Kerntheorie der modernen Mathematik. Viele Details und viele enge Verbindungen zu anderen Aspekten (Konstruktion mit Zirkel und Lineal, Kreisteilungszahlen, Erfindung der komplexen Zahlen, Minimalpolynome und so weiter) wurden ausgelassen. Zum Glück gibt es viele Fachbücher, die nicht nur die Galoistheorie in abstrakter Weise darstellen (und dadurch den Leser daran hindern, die Grundidee zu verstehen), sondern auch das Kennenlernen vieler Aspekte der Galoistheorie erleichtern. Abhängig von den Zielen des Lesers oder der Leserin können verschiedene Bücher empfohlen werden:

Das Original: Galois, É. (1846). Écrits et Memoires Mathematiques d'Évariste Galois, R. Bourgne and J.MP. Azra, Editors, Gauthier-Villars, Paris, 1962. Also: Oeuvres Mathematiques d'Évariste Galois, Gauthier-Villars, Paris, 1897, and J. Math. Pureset Appl. (1) 11, 381-444.

Eine umfassende Analyse des Originals mit klassischer Herangehensweise und mit einer vollständigen englischen Übersetzung: Edwards, H. M. (1984). Galois theory. New York: Springer-Verlag. siehe auch: Edwards, H. M. (2011). Galois' Version of Galois Theory - Talk Presented at the Galois Bicentennial. Institut Henri Poincaré, Paris, October 24, 2011.

Eine populäre Darstellung, zugänglich ohne formale Mathematik: Stewart, I. (2008). Die Macht der Symmetrie: warum Schönheit Wahrheit ist. Spektrum Akad. Verlag.

Eine elementare Herangehensweise mit Schwerpunkt unter Anderem auf die historischen Vorgänger: Bewersdorff, J. (2013). Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie. Springer Spektrum, 5. Aufl.

Eine historische geometrische Herangehensweise – nicht nur elementar: Klein, F. (1884). Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. B. G. Teubner, Leipzig, online: https://archive.org/details/vorlesungenber00kleiuoft.

Ein Fachbuch über Algebra mit enger Verbindung zur Schulmathematik: Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten. Heidelberg: Springer.

Eine Diskussion, warum und wie zukünftige Lehrer die Galoistheorie an Universitäten angehen könnten: Leuders, T. (2016). Subject Matter Analysis with a Perspective on Teacher Education – The Case of Galois Theory as a Theory of Symmetry. Journal für Mathematik-Didaktik, 37(Supplement 1), 163-191.