អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ការមើលភាគល្អិតដ៏តូចបំផុតតាម BANACH ក្នុងការស្វែងរកចំណុចនឹងមួយ

រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ: Christiane Rousseau។ ក្នុងអត្ថបទដ៏ខ្លីនេះយើងនឹងបង្ហាញពីរបៀបដែលយើងចាប់ផ្ដើមពីល្បែងមួយដ៏តូចរកអោយឃើញទ្រឹស្ដីមួយក្នុងចំណោមទ្រឹស្ដីដែលសំខាន់ជាងគេនៃគណិតវិទ្យាដែលមានឈ្មោះថា "**ទ្រឹស្ដីបទ Banach នៃចំណុចនឹង**"។ ទ្រឹស្ដីបទនេះមានការអនុវត្តដ៏អស្ចារ្យទាំងក្នុង និង ក្រៅគណិតវិទ្យា។ ក្នុងចំណុចទី៣ យើងនឹងនិយាយអំពី ការអនុវត្តមួយដ៏គួរអោយទាក់ទាញក្នុងរូបភាពដ៏សែនច្បាស់។ ប៉ុន្តែចូរផ្ដោតអារម្មណ៍ទៅលើល្បែងរបស់យើង ហើយមើលទៅគម្របនៃប្រអប់មួយដ៏ល្បីល្បាញ គឺរូបគោសើច។ នៅត្រចៀកខាងស្ដាំ ក៏ជារូបគោសើចដែរ។ ចំពោះគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៅលើគម្រប គឺដូចគ្នាបេះបិទទៅនឹងរូបនៅត្រចៀកខាងស្ដាំ។ ភាពដូចគ្នានេះ គឺជាអនុគមន៍ពីគម្របទៅនឹងត្រចៀកខាងស្ដាំរបស់វានោះឯងដែលយើងនឹងហៅវាថា F។ តួយ៉ាង ដូចជាចុងចង្ការបស់គោធំ ដូចគ្នាទៅនឹងចុងចង្ការបស់គោតូចនៅត្រចៀកខាងស្ដាំអញ្ចឹងដែរ។ ពេលនេះ យើងមានសំនួរតូចមួយគឺ : ***តើមានចំណុចណាដែលត្រូវបានបញ្ជូនទៅខ្លួនវាវិញតាមលំនាំខាងលើឬទេ?*** នៅត្រង់នេះ បើមានចំណុចនោះ យើងនឹងហៅចំណុចនោះថា ***ចំណុចនឹង*** ។ បើមានចំណុចនឹងមែន នោះវាគួរតែស្ថិតនៅក្នុងត្រចៀកខាងស្ដាំ។ ប៉ុន្តែត្រចៀកខាងស្ដាំនេះ ត្រូវបានបញ្ជូនទៅត្រចៀកខាងស្ដាំនៃកូនគោតូច។ យើងឃើញថា រូបភាពទាំងមូលនៅត្រចៀកខាងស្ដាំ ហាក់ដូចជារួមទៅចំណុចមួយដែលយើងតាងដោយ A ហើយ A ជាគោលដៅនៃសម្រាយបញ្ជាក់របស់យើង។

ឥឡូវ ចូរយើងចាប់ផ្ដើមជាមួយចំណុចណាមួយ ឧទាហរណ៍ថា នៅចុងចង្កាគេតាង P_0។ បន្ទាប់មក P_0 បញ្ជូនរូបភាពទៅ $P_1 = f(P_0)$ ដែលជាចុងចង្កានៃសត្វគោតូចនៅត្រចៀកខាងស្ដាំរបស់គោ។ តមកទៀត P_1 បញ្ជូនរូបភាពទៅអោយ P_2 ដែល $P_2 = f(P_1)$ ដែលជាចុងចង្ការបស់គោ លេចឡើងនៅត្រចៀកខាងស្ដាំនៃគោតូចជាបន្តបន្ទាប់។ យើងកត់សម្គាល់ឃើញវត្ថុបី៖

1. យើងអាចនឹងបន្តការសង្កេតរហូតដល់ចំនួនមិនកំណត់មួយដែលបង្កើតបានជាស្វ៊ីត (P_n) ដែល $P_{n+1} = (P_n)$
2. យើងសង្កេតឃើញថា មានតែចំណុចចំនួនកំណត់ណាមួយនៃស្វ៊ីតប៉ុណ្ណោះដែលមើលទៅឃើញច្បាស់ រីឯចំណុចដទៃបន្តទៀត មិនអាចមើលឃើញនោះទេ។ ជាការពិតណាស់ ពេលយើងពង្រីករូបភាព នោះយើងអាចឃើញរូបគោនឹង បានប៉ុន្មានដំណាទៀត។ ប៉ុន្តែ ទោះជាយើងខំប្រើឧបករណ៍ពង្រីកយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏យើងអាចមើលឃើញរូបគោនោះតែចំនួនកំណត់ណាមួយទៀតប៉ុណ្ណោះ។ យើងនៅតែមិនអាចមើលឃើញរូបគោនៅត្រចៀកខាងស្ដាំនោះបន្តបន្ទាប់ដដែល។
3. ស្វ៊ីតនេះហាក់ដូចជារួមទៅរកចំណុច A ដូចពីមុនអញ្ចឹង។

យើងជ្រើសរើសចំណុច Q_1 ណាមួយផ្សេងទៀត ហើយបង្កើតស៊ីត (Q_n) ដែល $Q_{n+1}=F(Q_n)$។ យើងនឹងបានឃើញថាស៊ីត (Q_n) នឹងរួមទៅរកចំណុច A តែមួយ។ ជាការពិតណាស់ យើងកត់សម្គាល់ឃើញថា តាមលំនាំបន្តបន្ទាប់ទៀតពិតជាមានចំណុច A តែមួយគត់ គឺជាចំណុចប្រសព្វនៃបណ្ដុំរូបភាពដែលនៅនឹងត្រចៀកខាងស្ដាំ ខិតទៅរក 0។

តើទ្រឹស្ដីបទ Banach នៃចំណុច នឹងប្រាប់យើងពីអ្វីខ្លះ? វានឹងប្រាប់យើងថា តាមពិតអនុគមន៍ F មានចំណុចនឹងតែមួយគត់នោះមានន័យថាមានចំណុច A តែមួយគត់នៃប្លង់ដែល $F(A)=A$។ ជាងនេះទៅទៀត វាក៏ជាការពិតផងដែរថា បើយើងចាប់ចំណុច P_0 ហើយយើងបង្កើតស៊ីត $\{P_n\}$ ដែល $P_{n+1}=F(P_n)$ បន្ទាប់មកស៊ីតនោះ នឹងរួមទៅរក A។

ប៉ុន្តែ តើហេតុអ្វីបានជាវារួមទៅរក A អញ្ចឹង? តើនឹងមានអនុគមន៍ F ណាទៀតដែរឬទេ ដែលរួមរកចំណុច A? ជាការពិតណាស់ មិនមានទេ។ ជាឧទាហរណ៍ បើបំណាកស្រាយមួយនៅលើប្លង់គ្មានចំណុចនឹង ហើយអនុវត្តន៍ $G(x,y)=\left(x+\left(x^2-1\right),y\right)$ មានចំណុចនឹងពីរ $(\pm1,0)$។ អនុវត្តន៍ F គឺជាល្បែងដែលមានលក្ខណៈពិសេសរបស់យើង។ វាគឺជាដំណើររួមមួយ។ ជាការពិតណាស់ រូបភាពតូចជាងដែនកំណត់។ បើចំណុចពីរ P និង Q មានចម្ងាយដោយផ្នែក នោះរូបភាពរបស់វាគឺ $F(P)$ និង $F(Q)$កាន់តែជិតជាងគ្នាចំណុច Pនិង Q។ សំណើរនេះពិតជាត្រឹមត្រូវតតខ្វោះព្រោះក្នុង $\mathbb{R}^2$ យើងអាចវាស់ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចផ្សេងគ្នាបាន។ ព្រោះក្នុង $\mathbb{R}^2$ គឺជាលំហមេទ្រិច។ វាជាលក្ខណៈពិតដែល F រួមព្រោះនៅពេលដែលយើងបង្កើតស៊ីត (P_n) នោះគ្រប់អ្វីដែលជាចំណុចចាប់ផ្ដើមគឺវាជាក់លាក់ (ទោះបីជាយើងមើលទៅលំនាំនោះឆ្ងាយ ឬជិត ឬតាមរយៈមីក្រូទស្សន៍ ឬតាមមីក្រូទស្សន៍អគ្គីសនីក៏ដោយ) នោះក្រោយពីចម្ងាយ N ណាមួយដែលអាស្រ័យទៅនឹងចំណុចចាប់ផ្ដើម នោះគ្រប់ធាតុ $P_n,n>N$ នៃស៊ីត ក្លាយទៅជាមិនអាចមើលឃើញ ឬមិនអាចបែងចែងអោយដាច់ពីគ្នាបាន។ យើងនឹងហៅវាម្ដងទៀតនៅចំណុចក្រោយដែលស៊ីតមានលក្ខណៈបែបនេះហៅថា ស៊ីតកូស៊ី។ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ យើងមានលក្ខណៈដែលថា គ្រប់ស៊ីតកូស៊ីមានលីមីត។ យើងហៅ $\mathbb{R}^2$ ជាលំហមេទ្រិចពេញ។

I. ទ្រឹស្ដីបទ Banach នៃចំណុចនឹង

ពេលនេះ យើងមានគ្រប់គ្រាន់នូវគ្រឿងផ្សំសម្រាប់ករណីទូទៅ ហើយយើងអាចបង្កើតនូវទ្រឹស្ដីមួយ។

ទ្រឹស្ដីបទ(ទ្រឹស្ដីបទ Banach នៃចំណុចនឹង) តាង K ជាលំហរមេទ្រិចពេញ ដែលមានចម្ងាយផ្សេងគ្នានៃពីរចំណុច P និង Q កំណត់ដោយ $d(P,Q)$។ តាង $F:K\to K$ ជាការបង្កើត មានន័យថាកើតមានឡើងនូវ $c\in(0,1)$ ដែលចំពោះគ្រប់ $P,Q\in K$ នោះគេបាន $d\left(F(P),F(Q)\right)\le cd(P,Q)$។ តមកទៀត F មានចំណុចនឹងតែមួយគត់គឺ $A\in K$ ដែល $F(A)=A$។

យើងនឹងកំណត់នូវគ្រប់ករណីដែលកើតឡើងក្នុងសំណើរនេះ។ ផ្នែកនេះទូទៅជាង ហើយអាចទុកវាសិនបើអ្នកខ្វល់ពីការអនុវត្តន៍បន្តនោះ។ យើងបានដឹងហើយថា ចម្ងាយរវាងចំណុច P និង Q គឺនៅក្នុង $\mathbb{R}^2$។ តើយើងបង្កើតសំណុំ K ដោយរបៀបណា?

និយមន័យ ចម្ងាយនៅលើសំណុំ K គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $d:K\times K\to\mathbb{R}$ ដែល

1. ចំពោះគ្រប់ $P,Q\in K,d(P,Q)\ge 0$
2. $d(P,Q)=0$ លុះត្រាតែ $P=Q$
3. ចំពោះគ្រប់ $P,Q,R\in K,d(P,Q)\le d(P,R)+d(R,Q)$ (វិសមភាពត្រីកោណ)

យើងស្គាល់លក្ខណៈទាំងនេះដែលបានបញ្ជាក់ច្បាស់នូវចម្ងាយអឺគ្លីដក្នុង $\mathbb{R}^2$ ។

ឥឡូវយើងប្រើឡើងវិញនូវនិយមន័យនៃស្វ៊ីតកូស៊ីដែលបានអោយនិយមន័យនៃបញ្ញាត្តិនៃស្វ៊ីត។ ក្រោយចំនួនកំណត់ណាមួយនៃធាតុ គ្រប់ធាតុដទៃទាំងអស់មិនអាចបែងចែកពីភាពខុសគ្នាបានទេ។ យើងក៏បានហៅឡើងវិញផងដែរនូវនិយមន័យនៃស្វ៊ីតរួម។

និយមន័យ

1. ស្វ៊ីត (P_n) នៃធាតុ ជាលំហមេទ្រិច K ជាស្វ៊ីតកូស៊ីចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ មាន $N\in\mathbb{N}, \forall n,m>N$ នោះ $d(P_n,A)<\varepsilon$
2. ស្វ៊ីត (P_n) នៃធាតុជាលំហមេទ្រិច K រួមទៅរកលីមីត $A\in K$ ដែលចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $N\in\mathbb{N}$ ដែលគ្រប់ $n>N$ នោះគេបាន $d(P_n,A)<\varepsilon$

និមយន័យ

លំហមេទ្រិច K មួយជាលំហមេទ្រិចពេញ បើស្វ៊ីតកូស៊ី (P_n) ណាមួយនៃធាតុ K រួមទៅរកធាតុ A នៃ K ។

តើយើងអាចស្រាយនូវទ្រឹស្តីបទចំណុចនឹងបានដោយរបៀបណា ? ភាពមានតែមួយគត់នៃចំណុចនឹង ជាវិធីដែលងាយ។ តាមពិតទៅ ឧបមាថា A និង B ជាចំណុចនឹងពីរ នោះ $F(A)=A$ និង $F(B)=B$ ។ ជាងនេះទៅទៀត បើ F បានបង្កើតឡើង នោះ $d(F(A),F(B))\le cd(A,B)$ ដូចនេះ $d(A,B)\le cd(A,B)$ ។ ចម្លើយតែមួយគត់គឺ $d(A,B)=0$ នោះបញ្ជាក់ថា $A=B$ ។

ដូចដែលមានស្រាប់ បញ្ញាត្តិនៃការស្រាយបញ្ជាក់សាមញ្ញណាស់៖ យើងបានរកឃើញរួចមកហើយ វានៅក្នុងល្បែងរបស់យើងជាមួយគោសើចនោះ។ យើងចាប់យកចំណុច $P_0\in K$ ណាមួយ ហើយយើងបង្កើតស្វ៊ីត (P_n)(ដូចពីមុនដែរ) ដែល $P_{n+1}=(P_n)$ នោះស្វ៊ីតនោះជាស្វ៊ីតកូស៊ី ហើយលីមីតរបស់វាជាចំណុចនឹង។ (ជាការពិតណាស់ ការបង្ហាញនូវសម្រាយបញ្ជាក់ពីរនេះ ត្រូវការសកម្មភាពមួយចំនួន ប៉ុន្តែយើងនឹងមិនបកស្រាយនូវបច្ចេកទេសលំអិតនោះទេ។ អ្វីដែលសំខាន់នោះ ជាដំណោះស្រាយដូចគ្នាក្នុងករណីទូទៅនៃលំហមេទ្រិចពេញដ៏ស្មុគស្មាញក្នុងករណីដ៏សាមញ្ញនេះ $K=\mathbb{R}$)។

គំនិតក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់ មិនត្រឹមតែសាមញ្ញ និង ប្រកបដោយអព្ភន្តរញ្ញាណ ប៉ុន្តែថែមទាំងមានភាពអស្ចារ្យជាច្រើនផងដែរ។ វាជាការផ្តល់អោយយើងនូវ វិធីដោះស្រាយតាមបែបវិភាគលេខក្នុងការបង្កើតចំណុចនឹង A មួយ។ នេះបានបង្ហាញថា ការអនុវត្តន៍ជាច្រើននៃទ្រឹស្តីបទនេះ អាចនឹងស្រាយបញ្ជាក់បានទាំងផ្នែកទ្រឹស្តីបទ និង ផ្នែកអនុវត្តន៍។

II. ការអនុវត្តន៍ក្នុងការវិភាគ

មួយក្នុងចំណោមទ្រឹស្តីអនុវត្តន៍ដ៏សំខាន់នៃទ្រឹស្តីបទ Banach នៃចំណុចនឹង គឺជាសម្រាយបញ្ជាក់ដែលមានស្រាប់ ផ្សំនឹងភាពមានតែមួយគត់នៃសម្រាយបញ្ជាក់នៃសមីការផ្សេង យ៉ាងគ្រប់គ្រាន់និងទៀងទៀត់។ ក្នុងការអនុវត្តន៍នេះ លំហមេទ្រិចពេញ K គឺជាសំណុំនៃអនុគមន៍ ហើយអនុវត្តន៍ F បំប្លែងអនុគមន៍មួយទៅជាអនុគមន៍ផ្សេងទៀត (យើងតែងតែនិយាយថា F ជាប្រមាណវិធី)។ វិធីបង្ហាញដ៏អស្ចារ្យ គឺដោះស្រាយរកចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល បើសិនជាមាន គឺជាចំណុចនឹងនៃប្រមាណវិធី F ។

អ្នកអាចនឹងបានសិក្សានូវសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញៗ ហើយបានរៀនពីល្បិចក្នុងការស្វែងរករូបមន្តដើម្បីស្រាយរកចម្លើយ។ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងអស់នេះ ពិតជាអាចដោះស្រាយដោយប្រើរូបមន្តបាន

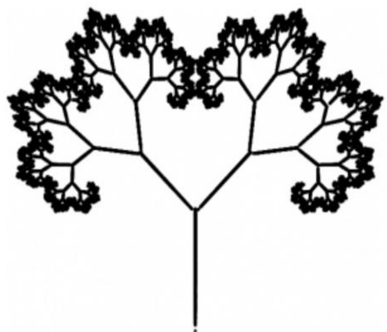
ប៉ុន្តែសម្រាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដទៃទៀត គ្មានរូបមន្តដើម្បីដោះស្រាយឡើយ។ ដូច្នេះកត្តាសំខាន់នៃទ្រឹស្តីបទនេះ ធានាអះអាងពីភាពកើតមានឡើងនៃចម្លើយ។ អ្នកមិនគួរភ្ញាក់ផ្អើលពេកទេ ដែលថាគ្មានរូបមន្តក៏អាចផ្តល់ចម្លើយទៅស្ទើរតែគ្រប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងអស់។ ជាការពិត សូមចាប់អារម្មណ៍នូវសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញដូចតទៅ $y'=e^{-2x^2}$ ចម្លើយរបស់វារកឃើញដោយ $y=\int e^{-x^2}dx$ អ្នកអាចនឹងចាំថាបម្រាប់ក្នុងមេរៀនប្រូបាប៊ីលីតេ និង ស្ថិតិបាននិយាយថា គ្មានរូបមន្តណាដែលអាចធ្វើព្រីមីទីវលើអនុគមន៍ e^{-x^2} បានទេ។ ដូច្នេះ ហេតុអ្វីបានជាយើងត្រូវដោះស្រាយដោយប្រើតារាងលេខនៅពេលរៀនពីច្បាប់ន័រម៉ាល់?

III. ការអនុវត្តន៍ក្នុងការពង្រួមរូបភាព

វិធីដ៏ល្អបំផុតក្នុងការទុករូបភាពមួយក្នុងអង្គចងចាំ ជាការរក្សាពណ៌នៃបណ្តុំចំណុចតូចៗទាំងឡាយនៃរូបភាព។ មានបញ្ហាពីរទាក់ទងនឹងវិធីសាស្ត្រនេះ៖

- វាត្រូវការគុណភាពនៃអង្គចងចាំដ៏ធំសម្បើម
- បើយើងព្យាយាមពង្រីករូបភាព (ឧទាហរណ៍ ការពង្រីកដើម្បីដាក់ក្នុងស៊ុបធំៗ) នោះបណ្តុំចំណុចតូចៗនោះនឹងរីកទៅជាការេធំនឹងដែរ ហើយយើងនឹងបាត់បង់នូវព័ត៌មានពីទម្រង់ពិតប្រាកដនៃការេ នីមួយៗ។

តើគន្លឹះជាអាទិភាពនៃការបង្រួមរូបភាពជាអ្វី? វានឹងលេចឡើងនូវព័ត៌មានតិចជាងរូបភាពដើម ប៉ុន្តែក្នុងការអនុវត្តន៍តាមវិធីដ៏ឆ្លាតវៃជាងនេះ នោះភ្នែកទទេមិនអាចមើលឃើញថារូបភាពសង្កេតនោះ កាន់តែព្រាលនោះទេ។



អ៊ិនធឺណែតបានបន្ថែមនូវតម្រូវការសម្រាប់ការបង្រួមរូបភាពនេះ។ តាមពិតរូបភាពបានធ្វើអោយល្បឿនក្នុងការបញ្ជូនទិន្នន័យលើគេហទំព័របានលឿន។ ដូច្នេះ ចំពោះល្បឿនរបស់អ៊ិនធឺណែតកាន់តែប្រសើរ ប្រសិនបើរូបភាពមានទំហំកាន់តែតូច កាន់តែប្រសើរ។ នៅពេលអ្នកមើលរូបភាពក្នុងអេក្រង់កុំព្យូទ័ររបស់អ្នកមិនអាចមើលឃើញទេថា វាមានភាពព្រាលក្នុងនោះ។ ប៉ុន្តែបើសិនជាអ្នកព្យាយាមពង្រីកវាឬពង្រីកដើម្បីដាក់ក្នុងអាល់ប៊ុម នោះយើងនឹងឃើញថារូបភាពនឹងអន់ជាងមុនមិនខាន។ មានប្រភេទរូបភាពសំខាន់ៗមួយចំនួនដែលបានបង្រួម ហើយទ្រង់ទ្រាយរូបដែលយើងច្រើនជួបប្រទះជាងគេគឺ JPEG ដែលបានក្លាយជាស្តង់ដានៃរូបភាពនៃម្រាមដៃ។ ការសរសេររូបភាពក្នុងទ្រង់ទ្រាយ JPEG ជាអនុគមន៍លោការីតនៃគណិតវិទ្យា។

ក្នុងរូបភាពនេះ យើងនឹងចាប់អារម្មណ៍តាមវិធីសាស្ត្រដទៃទៀតដែលមានបទពិសោធន៍ជាង។ វិធីសាស្ត្រនេះណែនាំដោយ Barnsley ត្រូវបានគេហៅថា iterate function systems។ ក្នុងគោលគំនិតនៃវិធីសាស្ត្រ គឺប្រហែលរូបភាពមួយជាកម្មបទនៃធរណីមាត្រ។ ដើម្បីអោយមានវត្ថុគ្រប់គ្រាន់ល្មមយើងនឹងមិនអាចកំណត់ខ្លួនឯងបានទេ ពីកម្មបទធរណីមាត្រសាមញ្ញដែលបន្ទាត់និងខ្សែកោងរាបស្មើប៉ុន្តែវត្ថុតម្រូវដ៏ស៊ាំញ៉ាំដែលដូចជា fern (fern ជារុក្ខជាតិដែលមានស្លឹកវែងស្រឡោនគ្មានផ្កាដូចក្នុងរូប) និងដូចនឹងកម្រាលព្រំរបស់លោក Fern Sierpinski ។

យើងនឹងពន្យល់ ពីគោលគំនិតនៃដំណើរ ការបង្រួមលើកម្រាលព្រំ Sierpinski (រូបខាងឆ្វេង) មើលទៅវាដូចជាវត្ថុស៊ាំញ៉ាំពីដំបូង។ តើយើងអាចរក្សាទុកបានយ៉ាងដូចម្ដេចក្នុងអង្គចងចាំកុំព្យូទ័រក្នុងរបៀបសន្សំសំចៃ។ របៀបដែលល្អបំផុតគឺរក្សាទុកក្នុងកម្មវិធីមួយដើម្បីងាយទាញយកប្រើពេលត្រូវការ។

ដើម្បីរក្សាទុកក្នុងកម្មវិធីនោះយើងត្រូវតែយល់ពីលក្ខណៈរបស់វត្ថុ ក្នុងធរណីមាត្រ។ ចូរសង្កេតមើលកម្រាលព្រំ Sierpinski ៖ វាបញ្ចូលគ្នា ដោយព្រំ Sierpinski បី (មានន័យថា ជាការចម្លងព្រំបីពីខ្លួនវា) ដែលពាក់កណ្ដាលនៃខ្លួនវា (ទាំងកម្ពស់ និងប្រវែង)។ តាមពិត ចាប់ផ្ដើមពីព្រំ Sierpinski យើងអាចកសាងបានព្រំទី២ទៀត ជាមួយនឹងដំណើរការដូចខាងក្រោម៖

- យើងបង្រួញព្រំ Sierpinski ដោយទុកពាក់កណ្ដាលនៃខ្លួនវា ពីខាងឆ្វេងទម្លាក់ចុះក្រោម
- យើងធ្វើការចម្លងលើកទីពីរនៃពាក់កណ្ដាលព្រំ Sierpinski នោះ ហើយបិទវានៅខាងស្ដាំ (នៃព្រំមុន)
- យើងធ្វើការចម្លងលើកទីបីនៃពាក់កណ្ដាលព្រំ Sierpinski នោះ ហើយបិទវានៅនឹងពាក់កណ្ដាលកំពូលនៃព្រំពីរមុន។

រូបភាពទីពីរដែលយើងបានកសាង គឺដូចបេះបិទទៅនឹងកម្រាលព្រំ Sierpinski ដំបូង ។ ដូចនេះ កម្រាលព្រំ Sierpinski គឺជាចំណុចនឹងក្នុងដំណើរនេះ។ ឥឡូវបញ្ចូលវាក្នុងគណិតវិទ្យា។ ចូរចង់ចាំថា ប្រវែងនៃកម្រាលព្រំ Sierpinski ស្មើគ្នានឹងកម្ពស់របស់វា។ ដូច្នេះ យើងកាត់ចេញពីចំណុចដើមនៅជ្រុងខាងឆ្វេងកម្រាលព្រំ Sierpinski ដូច្នេះ បាត និងកំពស់មានប្រវែងស្មើ 1។

យើងក៏ទទួលយកផងដែរ នូវការបំប្លែងខាងក្រោម កំណត់ក្នុង $\mathbb{R}^2$:

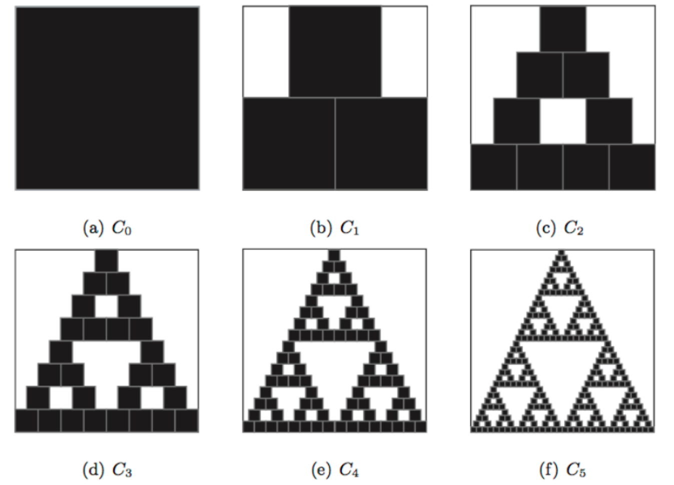
$T_1(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$, $T_2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\frac{y}{2}\right)$ $T_3(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4},\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)$។

បើ S ជាកម្រាលព្រំ Sierpinski នោះយើងបាន $S=T_1(S)\cup T_2(S)\cup T_3(S)$

តើមានសំណុំរង B ណាផ្សេងទៀតទេនៃប្លង់ ដែលមានលក្ខណៈដូចគ្នា គឺ

(1) $B=T_1(B)\cup T_2(B)\cup T_3(B)$? យើងនឹងឃើញថាវាគ្មានទេ។ ដូចនេះយើងបានបង្ហាញនូវចរិកលក្ខណៈនៃកម្រាលព្រំ Sierpinski ដែលមានតែសំណុំរង B ប៉ុណ្ណោះ នៃប្លង់ដែល (1) ពិត។ តើយើងបានធ្វើអ្វី? យើងត្រូវតែកសាងអនុគមន៍មួយដែលជាសំណុំរងនៃ B នៃប្លង់ត្រូវគ្នានឹងសំណុំរង $T_1(B)\cup T_2(B)\cup T_3(B)$។ យើងហៅអនុគមន៍នេះថា W ។ វាកំណត់ដោយ៖

(2) $B\to W(B)=T_1(B)\cup T_2(B)\cup T_3(B)$, ហើយយើងបានសង្កេតថា $S=(W)$ ដែលមានន័យថា S ជាចំណុចនឹងនៃអនុគមន៍នេះ។ យើងបានប្រកាសថា យើងចង់ពិសោធន៍ថាកម្រាលព្រំ Sierpinski គឺជាចំណុចនឹងតែមួយគត់ក្នុងអនុគមន៍នេះ។ ឥឡូវចូរសាកល្បងនឹងការ C_0 ដូចក្នុងរូប $1(a)$។ រូបភាពរបស់វាគឺ C_1 ក្នុងរូប $1(b)$។ យើងអនុវត្តន៍ដូចគ្នាចំពោះ C_1 និងទទួល C_2,C_3-C_5 (ក្នុងរូបភាពពី $1(c)-(f)$)

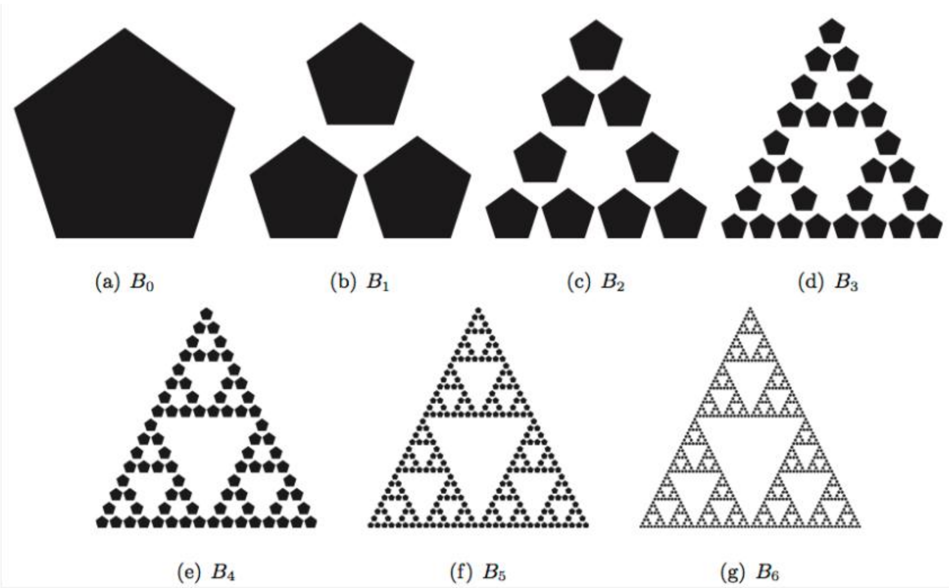


(a) C_0 (b) C_1 (c) C_2 (d) C_3 (e) C_4 (f) C_5

តាមរយៈរូបនេះ យើងសង្កេតឃើញវត្ថុបីយ៉ាង៖

1. គ្មានសំណុំណាមួយនៃ $C_0,\ldots,C_5$ ជាចំណុចនឹងក្នុងសំណុំ W ទេ ។
2. យើងអាចនឹងបន្តដំណើរការឥតឈប់ឈរ នោះផលិតផលនៃស្វ៊ីតអនន្តនៃសំណុំ (c_n) ដែល $C_{n+1}=W(C_n)$។
3. ស្វ៊ីត (C_n) ហាក់ដូចជារួមយ៉ាងលឿនទៅរកកម្រាលព្រំរបស់ Sierpinski។ តាមពិត ភ្នែករបស់យើងមិនអាចបែងចែកថា C_{10} ខុសពី S ទេ។ ដូចនេះជំនួសអោយ S នូវរូបភាពរបស់យើង កម្មវិធីសាងសង់ឡើងវិញនូវរូបភាពរបស់យើងផលិត C_{10}។ ហើយបើសិនជាភាពលះវាល្អជាងមុននោះ យើងអាចនឹងបន្ថែមអោយវាឈប់នៅ C_{20} ឬ C_{30}។ ដូចនេះ ភាពដូចគ្នាវាកាន់តែតូចទៅៗ ដែលកម្មវិធីអាចបន្តបង្កើត S ដល់ចំណុចជាក់លាក់ណាមួយនោះ។

មិនត្រឹមតែប៉ុណ្ណោះទេ ប៉ុន្តែយើងអាចពិសោធន៍ទៀតថា វាអាចដំណើរការបាននឹងសំណុំថ្មីៗ។ ឧទាហរណ៍ទី២ ចូរចាប់អារម្មណ៍នូវរូបភាពទី២។ កំណត់សំគាល់ $(i),(ii)$ និង (iii) ខាងលើអនុវត្តន៍ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ។



(a) B_0 (b) B_1 (c) B_2 (d) B_3 (e) B_4 (f) B_5 (g) B_6

យើងបានឃើញហើយថា ទ្រឹស្តីបទ Banach នៃចំណុចនឹង អនុវត្តន៍ចំពោះការសាសង់លើលំហមេទ្រិចពេញ ។ យើងបានកំណត់អនុគមន៍ W ក្នុង (2) លើសំណុំរងនៃកន្លែងមួយ។ ចំពោះលំហមេទ្រិច យើងនឹងរើស

យក K ជាសំណុំ (បិទ) នៃសំណុំរងរួមនៃកន្លែងនោះ។ យើងនឹងបង្ហាញនូវចម្ងាយលើ K ដែលត្រូវបានគេហៅថាចម្ងាយ Hausdorff $d_H(B_1,B_2)$។ និយមន័យនៃចម្ងាយ Hausdorff រវាងសំណុំរងពីរ B_1 និង B_2 គឺជារូបមន្តស្មុគស្មាញ ហើយមិនច្បាស់លាស់ទៀត ដូចនេះយើងនឹងពន្យល់តាមសញ្ញាណក្នុងរបៀបផ្សេងទៀត។ យើងចាប់ផ្ដើមដោយពន្យល់នូវ អត្ថន័យអ្វីដែលយើងចង់ផ្ដល់អោយសំណើរនោះ: $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ (ទោះប្រសិនបើ (យើងមិនបានកំណត់$d_H(B_1,B_2)$ក៏ដោយ) វាគ្រាន់តែជាអត្ថន័យដែល ប្រសិនបើភ្នែករបស់យើងឃើញច្បាស់ថា ε នោះ វាមិនអាចបែងចែកអោយដាច់បានទេថា B_1 ឬ B_2 ក្នុងគណិតវិទ្យា $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ គួរតែមាន (3) $\forall P\in B_1\exists B_2 d(P,Q)\le\varepsilon$ និង (3) $\forall P'\in B_2\exists Q'\in B_1\, d(P',Q')\le\varepsilon$។ (d នេះជាចម្ងាយអឺគ្លីដ រវាងសំណុំទ័លបិទពីរក្នុង $\mathbb{R}^2$)។ តាមរយៈនេះ គេអាចអោយនិយមន័យមិនផ្ទាល់មួយ។

និយមន័យចម្ងាយ Hausedroff រវាងសំណុំទ័លពីរ B_1 និង B_2 ជិតបំផុត ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon\ge 0$ ដូចបានបញ្ជាក់ក្នុងចំណុច(3)។

យើងអាចជឿជាក់លើខ្លួនយើងផ្ទាល់ថា អនុគមន៍ W ត្រូវបានក៏សាងឡើង។ តាមពិត ឧបមាថា $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ បន្ទាប់មកយើងអាចបង្ហាញថា $d_H\left(W(B_1),W(B_2)\right)\le\frac{\varepsilon}{2}$ តាង $P\in W(B_1)$ ។ មាន $i\in\{1,2,3\}$ និង $P_1\in B_1$ ដែល $P=T_i(P_1)$, $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ នោះមាន $Q_1\in B_2$ ដែល $d(P_1,P_2)<\varepsilon$។ តាង $Q=T_i(Q_1)\Rightarrow Q\in W(B_2)$ និង $d(P,Q)=d\left(T_i(P_1),T_i(Q_1)\right)=\frac{1}{2}d(P_1,Q_1)\le\frac{\varepsilon}{2}$។ ដូចគ្នាដែរ បើយើងចាប់ផ្ដើមជាមួយនឹង $P'\in W(B_2)$ នោះមាន $Q'\in W(B_1)$ ដែល $d(P',Q')\le\frac{\varepsilon}{2}$។

ដំណើរការនេះ បានសម្របនឹងការបង្រួមរូបភាពពិត (មើល [K] ឬ [RS])។ វិធីសាស្រ្តនេះ បង្កើតបានរូបភាពដែលមានគុណភាពខ្ពស់ នៅពេលដែលរូបភាពមានលក្ខណៈព្រៀលច្រើន។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ អត្រានៃការបង្រួម មិនល្អ មិនស្អាតដូចជាស្រទ្បាយ JPEG ទេ។ ដំណើការបង្កើតរូបភាពនេះអន់ខ្សោយណាស់ក្នុងក្លាយជាការចាប់អារម្មណ៍។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ភាពងាយស្រួលនៃគោលគំនិតរបស់វាទាំងអស់ ជាមួយនឹងអំណាចដែលនៅសល់។

4. ការអនុវត្តន៍ដ៏ភ្ញាក់ផ្អើល៖ វិធាន **PageRank**

ភាពជោគជ័យរបស់ Google ជាម៉ាស៊ីនរុករកវិធាន The PageRank ។ ក្នុងវិធាននេះ គណនានូវចំណុចនឹងនៃប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរលើ $\mathbb{R}^n$ ដែលបង្កើតឡើង ហើយចំណុចនឹងនេះ (ដែលជាវ៉ិចទ័រ) ផ្ទៀងផ្ទាត់តាមលំដាប់នៃទំព័រ។ ក្នុងការអនុវត្តន៍ចំណុចនឹង (ដែលជា eigenvector នៃ eigenvalue គឺ ១) ជាការគណនារកតម្លៃប្រហែលនៃ P_n សម្រាប់ផ្ទៀងផ្ទាត់ពេល n កាន់តែធំ។ យើងក៏បានអញ្ជើញអ្នកអានដ៏គួរអោយចាប់អារម្មណ៍មកមើលលំអិតក្នុងការពិពណ៌នាដ៏ខ្លី ពីរបៀបដែល Google ធ្វើការនោះ។

5. **សរុបសេចក្ដី**

អ្វីដែលយើងបានដឹងហើយក្នុងការពណ៌នាខ្លីៗពីរបៀបចាប់ផ្ដើមនៃល្បែងធម្មតា ដែលយើងបានស្វែងយល់ថាជាគោលគំនិតដ៏អស្ចារ្យដែលនាំទៅរកភាពជោគជ័យនៃគណិតសាស្រ្តនិងបច្ចេកទេស។ នៅពេលដែលយើងស្វែងរកចម្លើយតែមួយគត់សម្រាប់លំហាត់ ឥឡូវនេះវាក្លាយជាវិធីសាស្រ្តស្ដង់ដាក្នុងកម្រិតជាច្រើននៃគណិតវិទ្យា ដើម្បីសាកល្បងស្រាយបញ្ជាក់នូវលំហាត់ទាំងអស់នោះ តាមលក្ខណៈនៃចំណុចនឹងនៃប្រមាណវិធីពិសេសបង្កើតឡើងសម្រាប់គោលគំនិតនោះ។

យើងក៏បានឃើញផងដែរនូវសារប្រយោជន៍នៃការខិតចូលដែលថាទ្រឹស្តីបទបានផ្តល់នូវវិធីសាស្រ្តអនុវត្តន៍ដ៏មានប្រសិទ្ធិភាពដើម្បីបង្កើតនូវគម្រូស្រាយបញ្ជាក់មួយ ជាដែនកំណត់នៃស៊ីតនៅពេលដែលវារួមលឿន។

វិភាគគឺជាការសិក្សាលើអនុគមន៍។ អនុគមន៍ជាធម្មតាកំណត់ដោយលេខ។ ក្នុងការគណនាអនុគមន៍ច្រើនអថេរ យើងបង្កើតនូវកំណត់សំគាល់លើអនុគមន៍វ៉ិចទ័រ ដែលធាតុក្នុង $\mathbb{R}^n$។ ប៉ុន្តែហេតុអ្វីបានជាយើងឈប់ត្រឹមធាតុនៃ $\mathbb{R}^n$? យើងក៏មានបទពិសោធន៍ផងដែរថា អ្នកគណិតវិទ្យាចូលចិតបង្កើតនូវកំណត់សំគាល់នៃអនុគមន៍ ហើយបំប្លែងវាអោយក្លាយជាកំណត់បាន ជាឧទាហរណ៍ លើសំណុំនៃសំណុំហើយនិងលើសំណុំនៃអនុគមន៍ជាដើម។ ការវិភាគលើសំណុំនៃអនុគមន៍ ឥឡូវនេះក្លាយជាជំពូកដ៏សំខាន់ក្នុងការវិភាគក្នុងសម័យទំនើបនេះ ហៅថា functional analysis ដែលជាស្តង់ដាសម្រាប់ការសិក្សាថ្នាក់ឧត្តម។

អ្នកក៏ត្រូវបានអញ្ជើញអោយបង្កើតនូវការតភ្ជាប់ជាមួយនូវ ដំណើរការច្រំដែលដែលអ្នកបានរកឃើញ។ ជាឧទារណ៍ វាអាចជាដំណើរការច្រំដែលក្នុងវិមាត្រមួយដែលត្រូវគ្នានឹងស៊ីត $H\backslash'eron$ ដើម្បីបង្កើតបានជាឫសការេ។ ភាពរួមដ៏ឆាប់រហ័សនៃធរណីមាត្រ ក៏អាចត្រូវបានគេយល់ផងដែរពីចំណុចនៃការធ្វើបទបង្ហាញនេះ៕

ឯកសារយោង

[B] M. F. Barnsley, Fractals everywhere, San Diego, Academic Press, 1988.

[K] J. Kominek, Advances in fractal compression for multimedia applications, Multimedia Systems Journal, vol. 5,n 4, 1997, 255–270.

[R] C. Rousseau, Point fixe de Banach (in French), Accromath 5, hiver-printemps 2010 (www.accromath.ca).

[R2] C. Rousseau, How Google works? Klein vignette (www.kleinproject.org).

[RS] C. Rousseau and Y. Saint-Aubin, Mathematics and technology, SUMAT Series, Springer-Verlag, 2008 (A French version of the book, Mathéematiques et technologie, exists, published in the same series.)