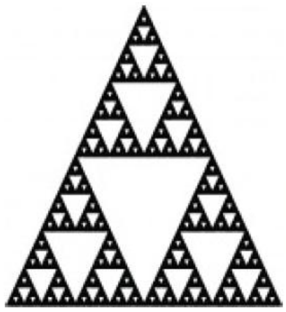
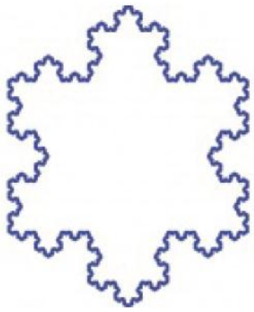
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

វិមាត្រ





រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ: Christiane Rousseau។

តើយើងវាស់ទំហំធរណីមាត្រនៃវត្ថុដោយវិធីណា? សម្រាប់ផ្នែកមួយនៃប្លង់ ជារឿយៗយើងប្រើ បរិមាត្រ ប្រវែង ផ្ទៃក្រឡា អង្កត់ផ្ចិត។ល។ ទាំងនេះមិនគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីរៀបរាប់ពីប្រភាគ ។

សម្រាប់គោលបំណងនេះ អ្នកគណិតវិទ្យាបានធ្វើការបង្ហាញពីគំនិត ដែលទាក់ទងនឹងវិមាត្រ គឺជាការធ្វើឱ្យមានលក្ខណៈទូទៅ ឬមានលក្ខណៈផ្លូវការនៃការសំគាល់របស់យើងបែបអព្ភន្តរញ្ញាណលើវិមាត្រ នៅពេលដែលយើងនិយាយអំពី 1D 2D ឬ 3D។ យើងនឹងពិភាក្សាពីវិធីខ្លះៗ ដើម្បីពណ៌នាពីវត្ថុ ដោយសិក្សាលើឧទាហរណ៍ពីរគឺ Sierpinski carpet និង Von Koch flake (មើលរូបផ្នែកខាងឆ្វេង)។

តើផ្នែកណាជាផ្ទៃនៃ Sierpinski carpet?

ជាដំបូងយើងត្រូវស្វែងយល់ពីសំណង់នៃ Sierpinski carpet (មើលរូបទីពីរ)។ វាត្រូវបានធ្វើដោយឆ្លងកាត់ដំណើរការបន្តបន្ទាប់។ យើងចាប់ផ្តើមេជាមួយនឹងត្រីកោណមួយនៅជំហាននីមួយៗ យើងយកចេញនូវត្រីកោណកណ្តាលមួយ។ យើងនូវសល់ត្រីកោណចំនួនបី។ ខាងក្នុងត្រីកោណដែលនូវសល់នីមួយៗ យើងយកចេញនូវត្រីកោណកណ្តាល ។ល។

(a) ត្រីកោណដើម (b) ដំណាក់កាលទី១ (c) ដំណាក់កាលទី២

រូបភាពទី២ ដំណើរការបន្តបន្ទាប់ដើម្បីសង់នូវត្រីកោណ Sierpinski carpet។

ឥឡូវយើងមានធាតុផ្សំទាំងអស់ដើម្បីគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ Sierpinski carpet។ យើងសន្មតថាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដើមគឺ A (មើលរូបទីពីរ (a)) ។

- ដំណាក់កាលទី១៖ យើងយកផ្ទៃនៃ $\frac{A}{4}$ ចេញហើយយើងនៅសល់ផ្ទៃនៃ $A_1=\frac{3}{4}A$ ។
- ដំណាក់កាលទី២៖ យើងយក $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃត្រីកោណ៣ ដែលនៅសល់ នោះវាគឺ $\frac{1}{4}A_1$ ។

ដូច្នេះយើងបាន ផ្ទៃក្រឡាដែលនៅសល់គឺ $A_2=\frac{3}{4}A_1=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}A=\left(\frac{3}{4}\right)^2 A$ ។

- ដំណាក់កាលទី៣៖ យើងយក $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃត្រីកោណ៩ ដែលនៅសល់ នោះវាគឺ $\frac{1}{4}A_2$ ។

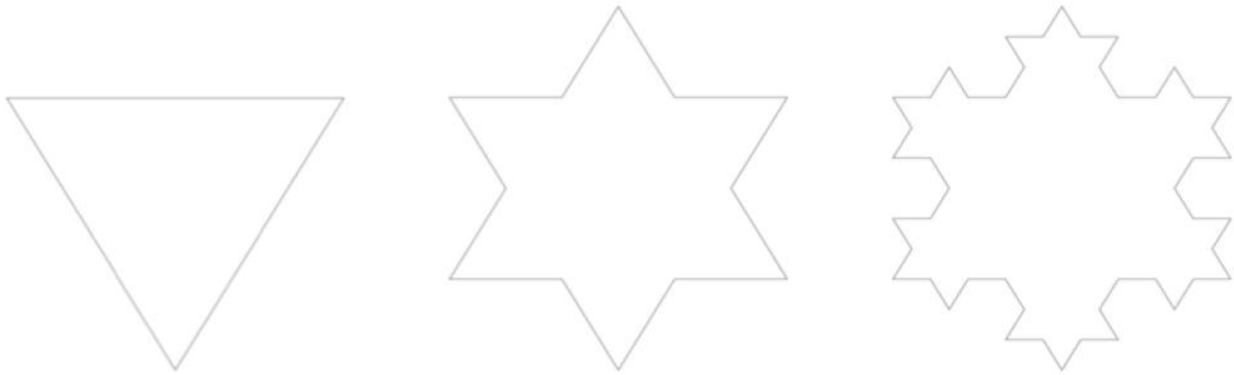
  ដូច្នេះយើងបាន ផ្ទៃក្រឡាដែលនៅសល់គឺ $A_3=\frac{3}{4}A_2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}A_1=\left(\frac{3}{4}\right)^3 A$ ។
- ...
- ដំណាក់កាលទី n៖ យើងយក $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃត្រីកោណ 3^{n-1} ដែលនៅសល់ នោះវាគឺ $\frac{1}{4}A_{n-1}$ ។

  ដូច្នេះយើងបាន ផ្ទៃក្រឡាដែលនៅសល់គឺ $A_3=\frac{3}{4}A_{n-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^n A$ ។
- ...

ចាប់ពី $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ យើងអាចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណគឺស្មើនឹង Sierpinski carpet សូន្យ ។

តើអ្វីទៅជាប្រវែងនៃ Von Koch flake ?

រំលឹកឡើងវិញថា Von Koch flake គឺទទួលបានដោយសារការធ្វើដដែលៗ។ នៅជំហាននីមួយៗនៃការធ្វើដដែលៗ នោះយើងជំនួសកំណាត់នីមួយៗដោយក្រុមមួយក្នុងចំណោមបួនក្រុម ដែលកំណាត់នីមួយៗមានប្រវែង $\frac{1}{3}$ នៃកំណាត់ដើម (មើលរូបទីបី)។ ប្រសិនបើ L គឺជាប្រវែងនៃត្រីកោណដើមក្នុងរូបទី៣ (a)។ នៅពេលនោះ $\frac{4}{3}L$ គឺជាប្រវែងនៃផ្កាយនៃរូបទី៣ (b) ហើយ $\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$ គឺជាប្រវែងវត្ថុក្នុងរូបទី៣ (c)។ល។ ជាករណីពិសេសគឺមានន័យថានៅជំហាននីមួយៗប្រវែងត្រូវបានគុណនឹង $\frac{4}{3}$ ។ ចាប់ពីមានចំនួនមិនកំណត់មួយនៃជំហានក្នុងសំណង់នេះ បន្ទាប់មកនៃ Von Koch flake គឺជាចំនួនមិនកំណត់ ។



(a) ត្រីកោណដើម (b) ដំណាក់កាលទី១ (c) ដំណាក់កាលទី២

រូបភាពទី៣ Von Koch flake និងដំណាក់កាលបន្តបន្ទាប់ក្នុងការសង់វា។

វិមាត្រនៃវត្ថុ fractal មួយ (Dimension of a fractal object)

Sierpinski carpet គឺជាវត្ថុពិបាក ហើយស្មុគស្មាញ។ យ៉ាងណាក៏ដោយផ្ទៃរបស់វាគឺសូន្យ ដូច្នេះហើយ វាផ្ដល់ឱ្យយើងនូវព័តមានតិចតួចអំពីវត្ថុ។ ជាការពិតប្រវែងនៃ Von Koch flake វាប្រាប់យើងថា វត្ថុគឺវាពិបាក ស្មុគស្មាញ ប៉ុន្តែវាគ្មានភាពជាក់លាក់បន្ថែមទៀតទេ។ ដើម្បីអាចឱ្យព័តមានបន្ថែមទៅលើវត្ថុ fractal អ្នកគណិត វិទ្យាបានណែនាំ ពីគំនិតដែលទាក់ទងនឹងវិមាត្រ ។

តើអ្នកគណិតវិទ្យាឱ្យនិយមន័យពីវិមាត្របែបណា?

យើងចាប់ផ្ដើមជាមួយគំនិតដែលប្រកបដោយអព្ភន្តរញ្ញាណស្ដីពីវិមាត្រ។ លក្ខណៈបែបអព្ភន្តរញ្ញាណនៃ ខ្សែកោងដែលគ្មានបត់បែនគឺជាវិមាត្រមួយ 1D ផ្ទៃរលោងគឺជាវិមាត្រពីរ 2D ហើយមាឌដែល សម្រាប់បំពេញគឺជាវិមាត្របី 3D។ ដូច្នេះ យើងអាចឱ្យនិយមន័យតាមគណិតវិទ្យានៃវិមាត្រដែលបង្កើតបាន ១ សម្រាប់ខ្សែកោងគ្មានបត់បែន ២ សម្រាប់ផ្ទៃរលោង ហើយ៣ សម្រាប់មាឌត្រូវបំពេញ ។ នៅក្នុងបរិបទ នៃលតាប័ត្រនេះ យើងនឹងកំណត់ដោយខ្លួនរបស់យើងលើវិមាត្រ ១ និង ២។ យើងចង់គ្របវត្ថុធរណីមាត្រមួយ នៅក្នុងប្លង់ជាមួយនិងការេតូចៗ។ (ប្រសិនបើយើងចង់ឱ្យនិយមន័យវិមាត្រ៣ យើងគួរតែប្រើគូប ប៉ុន្តែយើង គួរតែប្រើគូបតូចៗ សម្រាប់ខ្សែកោង និងផ្ទៃដោយគ្មានការផ្លាស់ប្ដូរនៃវិមាត្រ!)

ករណីខ្សែកោងគ្មានបត់បែន (Case of a smooth curve) (មើលរូបទីបួន)

- ប្រសិនបើយើងយកការេជាមួយនឹងទំហំពាក់កណ្ដាល បន្ទាប់មកយើងត្រូវការប្រហែលជាពីរដង ច្រើនជាងចំនួនការេ ដើម្បីយកមកគ្របលើខ្សែកោង។
- ប្រសិនបើយើងយកទំហំមួយភាគបីនៃការេ បន្ទាប់មកយើងត្រូវការប្រហែលជាបីដង ច្រើនជាងចំនួន ការេ ដើម្បីយកមកគ្របលើខ្សែកោង។
- ...
- ប្រសិនបើយើងយកទំហំ n ដងតូចជាងការេ បន្ទាប់មកយើងត្រូវការប្រហែលជា n ដង ច្រើនជាង ចំនួនការេ ដើម្បីយកមកគ្របលើខ្សែកោង ។

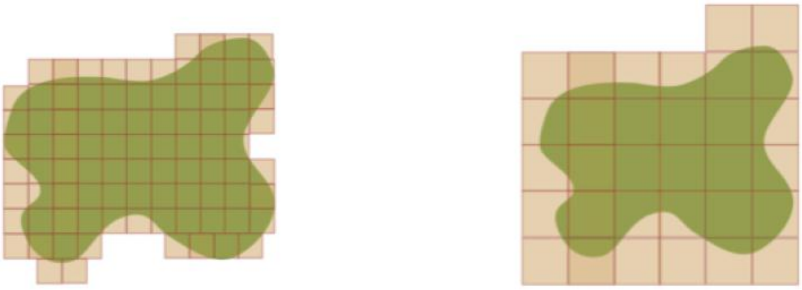
(a) (b)

រូបភាពទី៤ ការគណនាវិមាត្រ នៃខ្សែកោង ដោយប្រើការេដែលមានទំហំខុសៗគ្នា

ករណីផ្ទៃក្រឡាមួយ (Case of a surface) (មើលរូបទីប្រាំ)

- ប្រសិនបើយើងយកការេតែទំហំពាក់កណ្ដាល បន្ទាប់មកយើងត្រូវការទំហំប្រហែលបួនដង បន្ថែមលើ ទំហំការេ ដើម្បីគ្របលើវត្ថុ ។

- ប្រសិនបើយើងយកទំហំមួយភាគបីនៃការេ បន្ទាប់មកយើងត្រូវការទំហំប្រហែល ៩ដង បន្ថែមលើទំហំការេ ដើម្បីគ្របលើវត្ថុ ។
- ...
- ប្រសិនបើយើងយកទំហំតូចជាងការេ nដង បន្ទាប់មកយើងត្រូវការទំហំប្រហែល n^2 ដង បន្ថែមលើទំហំការេ ដើម្បីគ្របលើវត្ថុ ។



(a) (b)

រូបភាពទី៥ ការគណនាវិមាត្រ នៃផ្ទៃក្រឡា ដោយប្រើការេដែលមានទំហំខុសៗគ្នា

ឥឡូវយើងបាននិយមន័យនៃវិមាត្រ (បែបអព្ភន្តរញាណ)៖

និយមន័យៈ វត្ថុមួយនៅក្នុងប្លង់ដែលមានវិមាត្រ d នៅពេលដែលយើងយកការេមានទ្រនុងតូចជាង nដង មកគ្របវា បន្ទាប់មកយើងត្រូវការទំហំប្រហែល n^d ដង បន្ថែមលើទំហំការេ ដើម្បីគ្របលើវត្ថុ ។

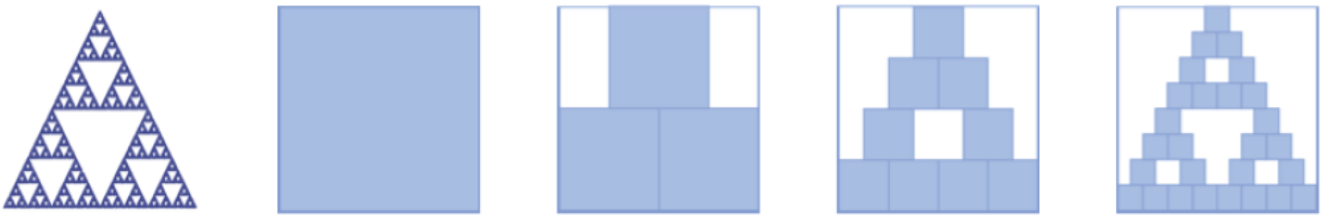
ការកត់សំគាល់ខ្លះៗលើនិយមន័យរបស់យើង

១. ជាការពិត ការេប្រើប្រាស់សម្រាប់គ្របលើវត្ថុអាចត្រូវធ្វើឱ្យជ្រាល ។ វាអាចគងលើគ្នាផងដែរ ។

២. ជំនួសឱ្យការេ យើងអាចប្រើទំហំដូចគ្នាដែរ ដែលជាផលធៀប (ratio) $r>1$ នៃប្រវែងទទឹង។ យើងនឹងទទួលបានលទ្ធផលសម្រាប់វិមាត្រ១ និងវិមាត្រ២ ហើយនេះគឺជាករណីទូទៅសម្រាប់វិមាត្រ២ ផងដែរ។ ដើម្បីគណនាវិមាត្រនៃ Von Koch flake ដោយប្រើផ្ទៃរាងបួនជ្រុងទ្រវែង វាងាយស្រួលជាងប្រើការេ ។

និយមន័យអាចទាញជាទូទៅ សម្រាប់ធរណីមាត្រនៃវត្ថុដែលជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^m$ ហើយនិងលទ្ធផលគឺមិនពឹងផ្អែកលើចំនួន m ដែលយើងតាងនោះទេ ។

និយមន័យៈ សំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^m$ ដែលមានវិមាត្រ d ប្រសិនបើយើងយក m គូបដែលមានទំហំធំបំផុតដែលមានទ្រនុង nដង ទៅគ្របវា បន្ទាប់មកយើងត្រូវការគូបដែលមានទំហំធំបំផុតប្រហែល n^d ដើម្បីគ្របវា។



(a) ត្រីកោណ Sierpinski (b) 1 (c) 3 (d) 9 (e) 27

រូបភាពទី៦ ចំនួនការេសម្រាប់គ្របលើត្រីកោណ Sierpinski carpet នៅក្នុងរូប (a)។

មិនមែនគ្រប់វត្ថុសុទ្ធតែមានវិមាត្រមួយនោះទេ។ ប៉ុន្តែវត្ថុដែលប្រហែលជាមានវិមាត្រមួយ ជារឿយៗ មិនមែនជាចំនួនគត់ទេ។ ចូរយើងគណនាវិមាត្រនៃ Sierpinski carpet (មើលរូបភាពទី៦)។

- ចូរយកផ្ទៃកដែលស្មើគ្នានៃការេទៅនឹងប្រវែងនៃបាត។ តើវាគ្របលើរូបនៃ Sierpinski carpet ឬនូវ? រូប (a)
- ប្រសិនបើយើងយកទំហំពាក់កណ្តាលនៃការេ បន្ទាប់មកយើងត្រូវការការេ ៣ដង ដើម្បីគ្របវា។ ចំណាំថា $3 = 2^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (រូប (c))
- ប្រសិនបើយើងយកការេជាមួយនឹងទំហំមួយភាគបួន បន្ទាប់មកយើងត្រូវការការេ ៩ដង ដើម្បីគ្របវា។ ចំណាំថា $9 = 4^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (រូប (d))
- ប្រសិនបើយើងយកការេជាមួយនិងទំហំមួយភាគប្រាំបី បន្ទាប់មកយើងត្រូវការការេ២៧ដង ដើម្បីគ្របវា។ ចំណាំថា $27 = 8^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (រូប (e))

ដូច្នេះ វាគឺងាយស្រួលដើម្បីសន្និដ្ឋានថា វិមាត្រនៃត្រីកោណ Sierpinski carpet នៃរូប (a) គឺ $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim 1.585$ ។

ឥឡូវនេះយើងពោលអះអាងថា វិមាត្រនៃ Von Koch flake នៃរូប (b) គឺ $\frac{\ln 4}{\ln 3} \sim 1.26$ ។ ហេតុអ្វី? ប្រសិនបើយើងព្យាយាមគ្របវាដោយការេដែលមានប្រវែងនៃផ្ទៃកមួយនៃរូបដែលធ្វើបន្តបន្ទាប់គ្នា ភាពលំបាកមួយដែលកើតពីមុខការេគ្របវាលើផ្ទៃកមួយ ហើយផ្ទៃកនោះខ្លះអាចគ្របលើពីរផ្ទៃក នៅពេលទាំងនោះមកពីកំពូលស្រួច។ ដូច្នេះ ចូរយើងប្រើល្បិចនៃការកត់សំគាល់ទី២ ហើយប្រើផ្ទៃ៤ជ្រុងទ្រវែងដែលមានប្រវែង៣ដងនៃទទឹង។ យើងឱ្យជំហានសំខាន់ៗនៃការពិភាក្សាគ្នា ហើយយើងអនុញ្ញាតឱ្យអ្នកបំពេញជាលម្អិត។ នៅជំហានបន្តបន្ទាប់នីមួយៗ យើងប្រើផ្ទៃ៤ជ្រុងទ្រវែង ចំពោះចតុកោណមួយច្រើនដង ដូចជ្រុងនៃជំហានបន្តបន្ទាប់។ ប្រសិនបើយើងដាក់ចតុកោណនៅផ្ទៃខាងក្រៅនៃ Von Koch flake បន្ទាប់មកវានឹងគ្របលើកំពូលថ្មីដែលនឹងត្រូវបានបន្ថែមទៅលើការធ្វើបន្តបន្ទាប់ចុងក្រោយ។ វាគឺងាយស្រួលដើម្បីត្រួតពិនិត្យ ថាតើយើងត្រូវការចតុកោណច្រើនដូចផ្ទៃកទាំងនោះទេ។ នៅក្នុងត្រីកោណដើមយើងមានបីផ្ទៃក បានពីបំលែងបន្តបន្ទាប់ទៅទម្រង់ចុងក្រោយ ហើយយើងគុណចំនួននៃចំណែកនឹង៤ ដូច្នេះយើងគុណចំនួននៃចតុកោននឹង៤ដែរ។ នៅពេលនេះយើងប្រើចតុកោណដែលមានចំណែក ៣ដង តូចជាង។ ចាប់ផ្តើមពី $4 = 3^{\frac{\ln 4}{\ln 3}}$ យើងសន្និដ្ឋានថា វិមាត្រនៃ Von Koch flake គឺ $\frac{\ln 4}{\ln 3}$ ។

វិមាត្រនេះឱ្យដោយ (រង្វាស់) មួយនៃភាពសាំញ៉ាំ ឬដង់ស៊ីតេនៃប្រភាគមួយ។ ការពិតយើងមានអារម្មណ៍ថា Sierpinski carpet ក្រាសជាង Von Koch flake ដែលមើលទៅដូចខ្សែកោងដែលក្រាស់មួយ។ នេះគឺជាការឆ្លើយតបទៅនឹងការពិតដែលថា $\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{\ln 4}{\ln 3}$ ។

ការអនុវត្តន៍ (Applications)

បណ្ដាសរសៃឈាមចេញចូលបេះដូង គឺជាជីវិតជាមួយសាច់ដុំ។ វាមិនមែនដូចនៅកន្លែងណាផ្សេងទៀត នៅក្នុងរាងកាយនោះទេ។ ការស្រាវជ្រាវ គឺត្រូវបានប្រឆាំងលើរឿងនេះ ហើយនៅក្នុងភាពដែលពិបាកសម្រាប់វិមាត្រថា គ្រប់លំដាប់ដើម្បីបង្កើនសមត្ថភាពក្នុងការធ្វើរោគវិនិច្ឆ័យពីការប្រើប្រាស់ឱសថ។

ការគូរប្លង់នៃដើមឈើនៃទងសួត។ អត្តពលិកកម្រិតខ្ពស់ គឺដូចជាការអត់ធ្មត់យ៉ាងខ្លាំងពីជំងឺហឺតរបស់ប្រជាជនទូទៅ។ ហេតុអ្វី? អត្ថបទស្រាវជ្រាវ [Ma] បានសិក្សាលើ (ភាពអំណោយផល) សួត។ មានបំពង់ទងសួតចំនួន ១៧ កម្រិត មុនពេលមកដល់ទងសួតក្រោយបំផុតតាមដោយ acini ដែលជាប់ទាក់ទងនឹងបណ្ដូរខ្យល់ដង្ហើម។ ប្រសិនបើបំពង់ទងសួតស្ដើងពេក បន្ទាប់មកសំពាធកើនឡើងនៅពេលខ្យល់ជ្រៀតចូលក្នុងកម្រិតបន្ទាប់នៃបំពង់សួត។ ប៉ុន្តែវាគឺធំទូលាយពេក ដូច្នេះមាឌដែលនៅសល់ស្មើគ្នានៅក្នុងកម្រិតនីមួយៗ បន្ទាប់មកមាឌក្លាយជាធំបំផុត។ (វាគួរក្លាយជាមិនកំណត់ ប្រសិនបើយើងមានចំនួនមិនកំណត់នៃកម្រិតមួយ) ដូច្នេះ (ភាពអំណោយផល) សួតគួរមានមាឌតូចបំផុត បើគ្មានការកើនឡើងនៃសំពាធ។ ប៉ុន្តែ ទន្ទឹមនឹងភាពអំណោយផលរបស់សួត ការថយចុះតិចតួចនៃអង្កត់ផ្ចិតបំពង់ទងសួតដំណើកនាំឱ្យមានកំនើននៃសំពាធខ្ពស់ជាងការថយចុះដូចគ្នា ភាពទូលាយនៃបំពង់ទងសួត។ (នេះបណ្ដាលមកពីគ្មានបន្ទាត់ពិសេស បង្កើតតួនាទីផ្ដល់សំពាធ)។ សួតរបស់មនុស្សមានបំពង់ទងសួតទូលាយ ហើយមាឌធំជាង ភាពអំណោយផលរបស់សួតតាមទ្រឹស្ដី។ សូលុយស្យុងកំប៉ុងនេះផ្ដល់នូវការការពារក្នុងករណីនៃ Bronchoconstriction នៃរោគសាស្ត្រមួយនៃការថយចុះអង្កត់ផ្ចិតរបស់បំពង់ទងសួតដែលអាចបណ្ដាលមកពីជំងឺហឺត។ អត្តពលិកមានសួតទូទៅ ប្រហែលជាភាពអំណោយផលរបស់សួតតាមទ្រឹស្ដី ហើយដូច្នេះ វាគឺងាយឈឺចាប់ខ្លាំង។

ពោះវៀតតូចៈ ផ្ទៃខាងក្រៅនៃពោះវៀនតូចមានផ្ទៃប្រហែល $0.5m^2$ វាត្រូវនឹងផ្ទៃខាងក្នុងមានផ្ទៃប្រហែល $300m^2$។ យើងបានឃើញជាមួយ Von Koch flake ដែលថាភាគនៃខ្សែកោងអាចមានប្រវែងមិនកំណត់មួយ ទោះបីជាវាលាតសន្ធឹងនៅក្នុងពីផ្ទៃកំណត់មួយ។ នេះគឺជាល្បិចប្រើដោយធម្មជាតិ តំបន់នៃផ្ទៃខាងក្នុងនៃពោះវៀនតូចគឺវាធំណាស់ រហូតធំជាងការជ្រាប ឬជក់នៃពោះវៀនធំ។ ធម្មជាតិនៃប្រភាគរបស់ផ្ទៃ ធ្វើឱ្យសម្រេចបំណងនេះ។ ដូចគ្នាដែរ គឺពិតសម្រាប់ផ្ទៃនៃ aveoli នៅចុងបញ្ចប់នៃទងសួតក្នុងសួត។ ចាប់តាំងពីដើមទងសួតមានធម្មជាតិប្រភាគផ្ទៃនៃ aveoli គឺទំហំបំផុត ដូច្នេះហើយវាបង្កើនបណ្ដូរឧស្ម័ន។

ឯកសារយោង

[Ma] B.Mauroy, M.Filoche, E.R. Weibel, B. ~Sapoval, An optimal bronchial tree may be dangerous, Nature, **427** (2004),633-636.