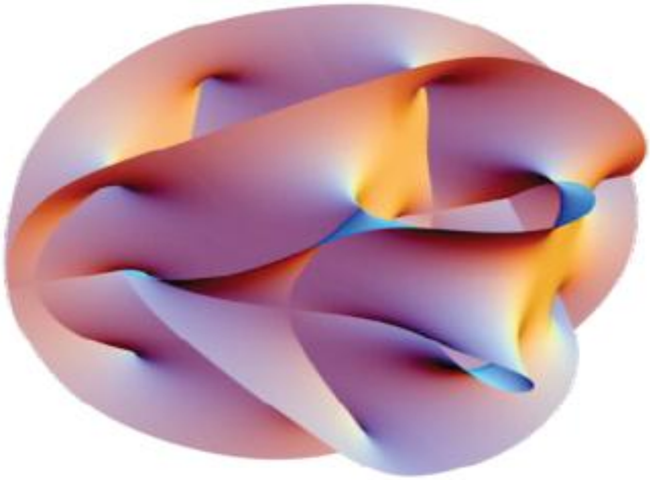
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

Higher Dimensions



រូបភាពទី1: ការពណ៌នានៃ *Calabi – Yau* ច្រើនជង

(សារៈសំខាន់សំរាប់ការពណ៌នានៃគម្រូលំហវិមាត្រខ្ពស់ក្នុងទ្រឹស្តី *Superstring*)

១. ការរេខចាំមើលនូវវិមាត្របន្ទាប់

តើពិភពលោកយើងពិតជាមានវិមាត្រច្រើនជាងវិមាត្របីមែនឬទេ? បើដូច្នោះមែន តើមានប្រធានបទអ្វីដែលមាននៅក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់ ហើយមានទំនាក់ទំនងជាមួយពិភពលោករបស់យើងបែបណាទៅ? តើវាអាចទៅរួចទេ ដើម្បីធ្វើការងារអ្វីមួយឲ្យយល់ដោយប្រើវិញ្ញាណនោះ? ឬមួយក៏ពួកគេដកស្រង់ចេញពីការបង្ហាញផ្សេងៗតាមទ្រឹស្តីទំនាក់ទំនងដោយប្រើវិមាត្របួន ដើម្បីពន្យល់ពីគន្លឹះនៃលំហពេល *(Space-time)* ហើយវិមាត្រប្រាំមួយគឺចាំបាច់ ដើម្បីពន្យល់ពីការបត់បែននៃលំហពេល *(Space-time)* និងការខុសគ្នានៃទ្រឹស្តីចំណង *(String theories)* ដែលវាសំខាន់ប្រើសំរាប់ការបង្ហាញចំពោះលំហវិមាត្រ 26 *(e.g.L. Botelho, 1999)*។ ដែនកំនត់ថ្មីៗផ្សេងទៀតនៃប្រមាណវិធីសំរាប់លំហវិមាត្រខ្ពស់ និងការបង្ហាញវិមាត្របី គឺជាការសិក្សារចនាសម្ព័ន្ធនៃការមិនកំណត់ពេលវេលសំរាប់គម្រូផលិកសាស្ត្រ *(Crystallography)*។ សំណុំចំនុចលំហវិមាត្រខ្ពស់ដែលវត្ថុគិតឃើញខាងក្នុង(ដូចជាចំនួនលេខគត់ក្នុងវិមាត្រ5) ចំពោះវិមាត្របីក្នុងលំហត្រូវបានគេគាំទ្រចំពោះរចនាសម្ព័ន្ធនៃផលិក។ ឧទាហរណ៍ទាំងនេះ បង្ហាញពីលក្ខណៈនៃការគិតបែបគណិតវិទ្យាមួយក្នុងចំណោមទាំងនោះដែរដូចជា៖ បើសិនវាងាយស្រួល ឬមានប្រយោជន៍ពីវត្ថុដ៏អស្ចារ្យក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់ ដូចជាវិមាត្រវិសេស គឺវិមាត្របីក្នុងលំហ អាចត្រូវបានគេពង្រីកឡើង។ បញ្ហានេះ គេពន្យល់យ៉ាងងាយទៅតាមរូបមន្តគណិតវិទ្យា។ ដូច្នេះ សមីការបន្ទាត់ដែលមានអថេរបី ត្រូវបានគេបកស្រាយជាប្លង់ក្នុងលំហ។ សមីការបន្ទាត់ដែលមានអថេរបួនគេបកស្រាយតាមរយៈមាឌ *hyperplane* ក្នុងលំហវិមាត្របួន។ ដូចគ្នាដែរ ចំពោះសមីការបន្ទាត់ដែលមាន n អថេរ គេបកស្រាយក្នុងវិមាត្រ $(n-1)$ ក្នុងលំហមានវិមាត្រ n។ គេប្រើអថេរច្រើនជាងបី វាមានប្រយោជន៍ដល់ការពង្រីកគុណប្រយោជន៍ច្រើន ពីទំនាក់ទំនងគណិតវិទ្យាពណ៌នា។ វាមិនចាំបាច់គណនាតាមរូបមន្តពិជគណិត និងកំរិតនៃចំនួនដើម្បីឲ្យមានការពណ៌នាតាមវិញ្ញាណនៅក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់ទេ។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ការពិសោធន៍ដឹកនាំការពន្យល់លទ្ធផល គ្រាន់តែជាការនិយាយដល់ពិភពលោកពិតៗប៉ុណ្ណោះ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត មានការពិពណ៌នាពី

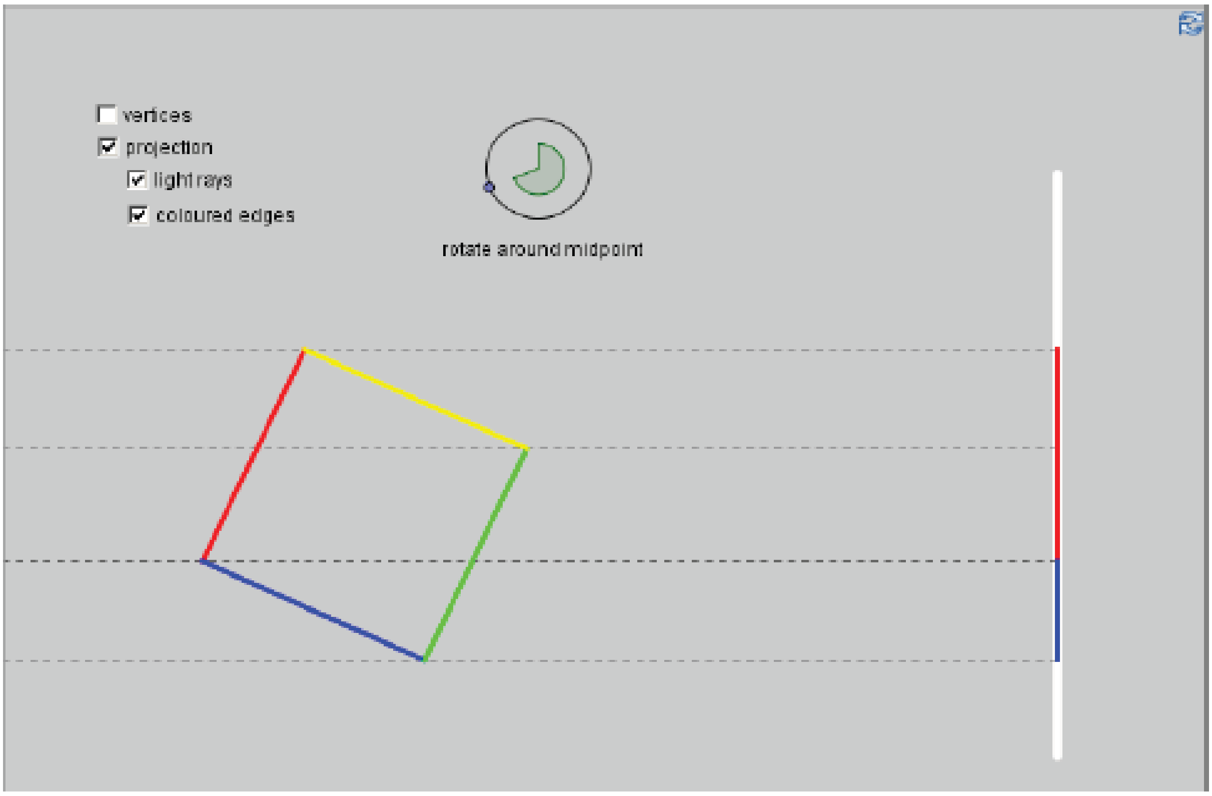
គោលបំណងជាមូលដ្ឋាន នៃលំហវិមាត្រខ្ពស់មានវិមាត្របួនក្នុងលំហ។ ទោះជាយ៉ាងក៏ដោយ ការដោះស្រាយខាងក្រោមជាការទាក់ទងទៅនឹងគំនិតវិវត្តនៃប្រធានបទលំហវិមាត្រខ្ពស់ នឹងត្រូវបានគេពិភាក្សាតាមរយៈគំរូដោយចាត់ទុកថាប្រធានបទ គូបមានវិមាត្របួន វានឹងមានការលំបាកចំពោះគូបដែលមានក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់។ ការប្រៀបធៀបមានការទូលំទូលាយតាមរយៈ សម្មតិកម្មជាមូលដ្ឋានចំពោះការយល់ដឹងអំពីលំហវិមាត្រខ្ពស់។ ខាងក្រោមនេះមានរបៀបបីផ្សេងគ្នា នឹងត្រូវបានគេបង្ហាញនិងវិភាគដូចតទៅ៖

1. ការបញ្ចាំងរូបភាពនៃវត្ថុក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់ទៅលើប្លង់វិមាត្រ២។
2. ការប្រសព្វរវាងគូបប៉ោងនិងប្លង់ប៉ោង។
3. ការលាតនៃប្រព័ន្ធវត្ថុដែលតាំងនៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេដេកាត។

២. **ការបញ្ចាំងរូបភាព** ***(Projection)*:**

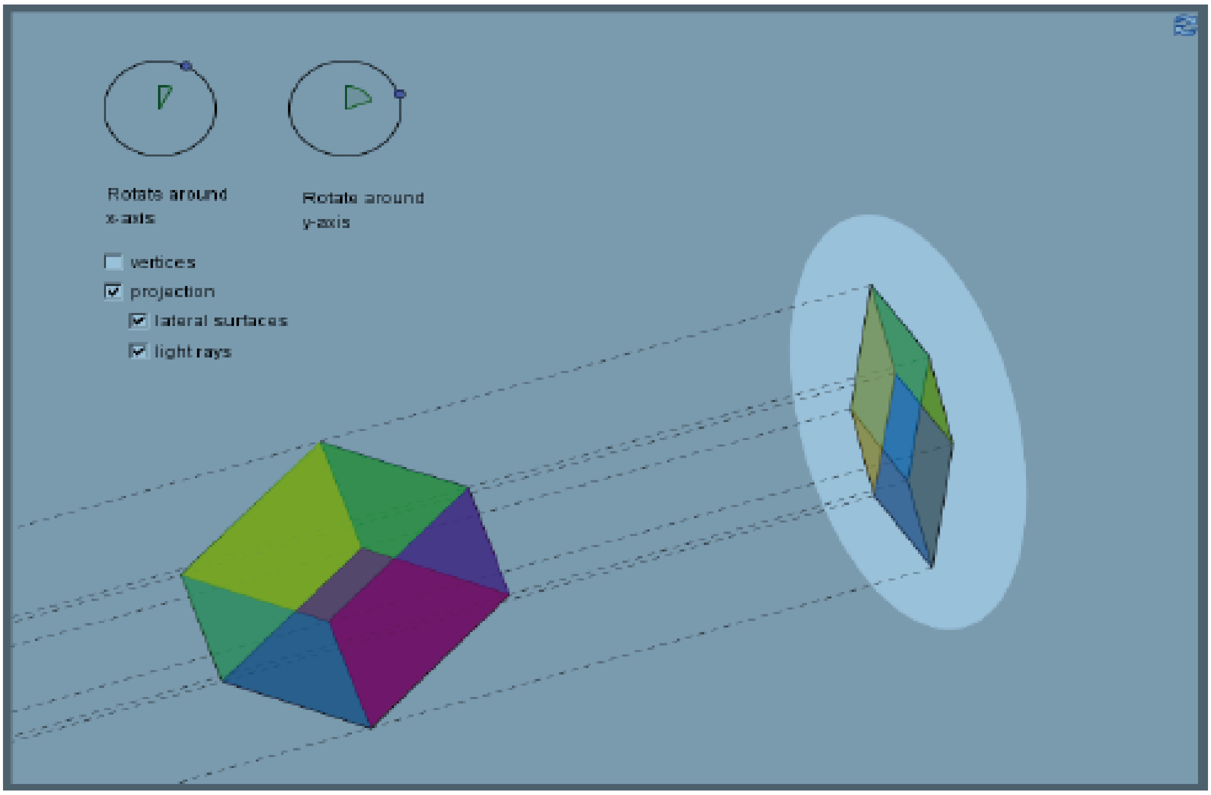
នៅក្នុងផ្នែកនេះ គំនិតជាមូលដ្ឋាននៃការពិពណ៌នាគោលបំណងនៃលំហវិមាត្រខ្ពស់ដោយបញ្ចាំងរូបភាពតិចតួច ត្រូវបានគេនិយាយជាទូទៅក្នុងមេរៀនលំហវិមាត្រខ្ពស់។ ជាពិសេសមេរៀន ***Projection*** ដែលមានអង្កត់ទ្រូង n និងវិមាត្រកែងគ្នាក្នុងលំហវិមាត្រ $(n-1)$ ក្នុងលំហអាចជាការនិយាយជាទូទៅ ។

ឧទាហរណ៍ 1: ការបញ្ចាំងរូបភាពនៃការេ និងគូប



រូបភាពទី 2.1: ការបញ្ចាំងរូបភាពការេទៅប្លង់វិមាត្រ 2

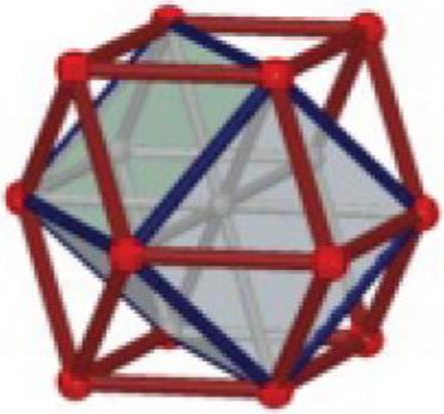
(អ្នកសសេរ: *Sebastian Hammmer , University of Wurzburg*)



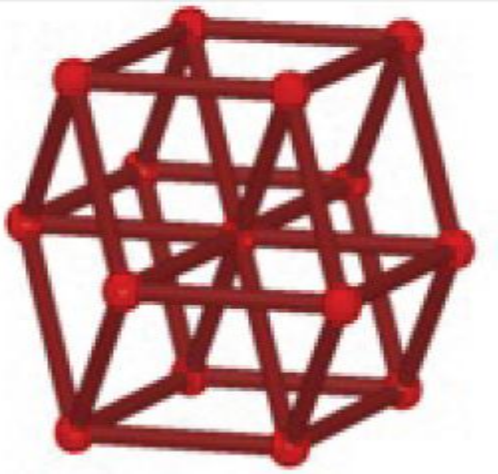
រូបភាពទី 2.2: ការបញ្ចាំងរូបភាពគូបទៅប្លង់វិមាត្រ 2

(អ្នកសសេរ: *Sebastian Hammmer , University of Wurzburg*)

ចំពោះ $1 \le i \le 4$ តាង A_i ជាការេបញ្ឈរ។ ការបញ្ចាំងរូបភាពនៃរូបភាពទី2.1 ជាការេតាងឲ្យបន្ទាត់កាត់គ្នា។ $g_1 : \overrightarrow{X} = A_1 + k.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $(1 \le i \le 4)$ ដែលមានបន្ទាត់ $h : x_1 + x_2 = 0$។ នេះជាការបញ្ចាំងរូបភាពដូចគ្នា ការបញ្ចាំងរូបភាពនៃ n វិមាត្រ គឺជាការពិពណ៌នាដោយពេញលេញតាមរយៈ ការបញ្ចាំងរូបភាពកូអរដោនេនៃបន្ទាត់បញ្ឈរ។ យើងពិនិត្យឃើញចំនុចជាច្រើនដែលកាត់តាមបន្ទាត់ត្រង់។ $g_1 : \overrightarrow{X} = A_1 + k.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $(1 \le i \le n^n)$ និងមាន $(n-1)$ ប្លង់ $R : x_1 + \dots\dots + x_n = 0$ វ៉ិចទ័រ $(1,1,\dots,1)$ កែងទៅនឹងប្លង់ R បន្ទាត់ g_i ជាបន្ទាត់កែងនឹងប្លង់ R តាមរយៈបន្ទាត់បញ្ឈរ A_i។ បន្ទាត់ពីរដូចគ្នា រូបភាពបញ្ចាំងខាងលើមានរូបភាពដូចគ្នា ដែលនៅខាងក្រោមមានរូបភាពពិសេសដែលយើងទទួលបានពីរូបភាពទី 3.2 តំណាងឲ្យរូបភាពកែងគ្នានៃគូបមានវិមាត្របួននៅក្នុងលំហវិមាត្របី។



រូបភាពទី 3.1: រូបបញ្ចាំងនៃ *4D – hypercube* មានចំនុចគែម 8 ចំពោះបន្ទាត់បញ្ឈរនៃ *3D- Cube*

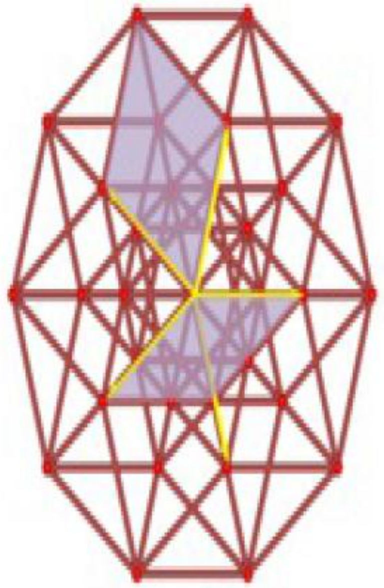


រូបភាពទី 3.2: ការបញ្ចាំងរូប hypercube

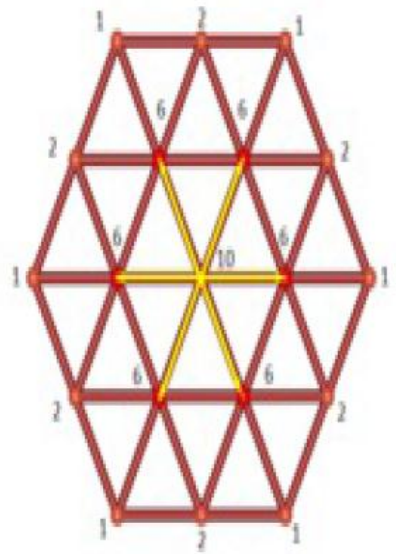
រូបភាពទី 2.2 បង្ហាញពីវ៉ិចទ័រទូទៅបីនៃគូប និងរូបភាពរបស់វាស្ថិតនៅក្រោមអង្កត់ រូបភាពបញ្ចាំងកែងគ្នា។ បន្ទាត់បញ្ឈរទាំងអស់នៃគូប មានផលបូកបន្ទាត់នៃវ៉ិចទ័រមេគុណ 0 និង 1។ រូបភាពបញ្ចាំងជាជួរមានលក្ខណៈដូចគ្នាទៅនឹងរូបភាពនៃបន្ទាត់បញ្ឈរទាំងនោះដែរ។ ពេលគេពិព៌ណនាពីគូបមាន n វិមាត្រជាមួយការផលបូកបន្ទាត់វ៉ិចទ័រទូទៅមាន n បន្ទាត់ដែលបង្ហាញដូចខាងក្រោម :

ចំពោះគូបមាន n វិមាត្រមានរូបបញ្ចាំងកែងគ្នាក្នុង IR^2 និងប្លង់បញ្ចាំងត្រឹមត្រូវដូចជាវ៉ិចទ័រទូទៅ ចំពោះបន្ទាត់បញ្ឈរត្រូវនឹងពហុកោណមាន n ជ្រុង។ យោងទៅតាមការកើនឡើងរូបភាពនៃបន្ទាត់បញ្ឈរផ្សេងៗទៀត។ លទ្ធផលជាចុងក្រោយស្ថិតក្នុងការបន្សំបន្ទាត់ដែលមានទំនាក់ទំនងនឹងគ្នា។ (ចំពោះ $n=3$ មើលរូបភាពទី2.2 និងឧទាហរណ៍ 1 ត្រីកោណមានវ៉ិចទ័រទូទៅមួយ)។ ដើម្បីឲ្យយល់ពីរបៀបបញ្ចាំងរូបភាពគូបមាន n វិមាត្រ នៅខាងលើ ក្នុងលំហដែលមាន k វិមាត្រ ត្រូវបានគេទទួលជាលើកដំបូងដោយយើងពន្យល់ពីគូបមួយបញ្ចាំងរូបភាពលើបន្ទាត់ក្នុងលំហមានវិមាត្របី ចំពោះបន្ទាត់បញ្ឈរនីមួយៗនៃគូបយកប្លង់មួយកែងទៅបន្ទាត់ដែលមានកំពូល។ ចំនុចកាត់គ្នានឹងបន្ទាត់មួយមានរូបភាពបញ្ចាំងកែងគ្នានៃកំពូលមួយលើបន្ទាត់។ ជាការសង្ខេប យើងបញ្ចាំងគូបមាន n វិមាត្រ លើប្លង់មាន k វិមាត្រដែរ។ ចំពោះកំពូលនីមួយៗនៃគូបយកប្លង់ដែលមាន $(n-k)$ វិមាត្រ កែងទៅប្លង់មាន k វិមាត្រ ដែលមានកំពូលមួយ។ ចំនុចកាត់មួយនៃប្លង់ពីរនេះ គឺជារូបភាពបញ្ចាំងកែងគ្នាទៅនឹងប្លង់មានវិមាត្រ k។ ដូច្នេះ រូបភាពបញ្ចាំងកែងគ្នាមានវិមាត្រពីរនៃគូបមួយមានវិមាត្រ 5 អាចត្រូវបានគេបង្ហាញប្រាប់ដូចខាងក្រោម:

ដោយផ្អែកលើរូបភាពនៃវ៉ិចទ័រទូទៅ (ការចង្អុលប្រាប់បន្ទាត់បញ្ឈរនៃពហុកោណ) រូបភាពនៃបន្ទាត់បញ្ឈរផ្សេងទៀត អាចត្រូវបានគេស្វែងរកដោយបន្ថែមវ៉ិចទ័រទាំងនោះ (មើលរូបភាពទី 4.1) រូបភាពនៅតាមជ្រុងទាំងនេះជាគូបមួយល្បីល្បាញ ដែលត្រូវបានគេហៅថា $Penrose - Romhs$ (មើលក្នុង Senechal 1995)។ វាជាបាតុភូតដ៏អស្ចារ្យផ្សេងទៀតត្រូវបានគេបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី 4.2 ក្រោមរូបភាពបញ្ចាំងនៃគូបមានវិមាត្រ 6 អង្កត់ទ្រូងរបស់វាមានចំនុចបញ្ចប់$(0,0,0,0,0,0)$ ទៅ$(1,1,1,1,1,1)$ មានបន្ទាត់បញ្ឈរ 7 មានរូបភាពបញ្ចាំងដូចគ្នា។ ចំនួននៃរូបភាពពីមុនត្រូវបានគេអោយក្នុងរូបភាព 4.2។



រូភាពទី 4.1: រូបបញ្ចាំងគូបមួយ មានវិមាត្រ 5 លើប្លង់



រូភាពទី 4.2: រូបបញ្ចាំងគូបមួយ មានវិមាត្រ 5 លើប្លង់

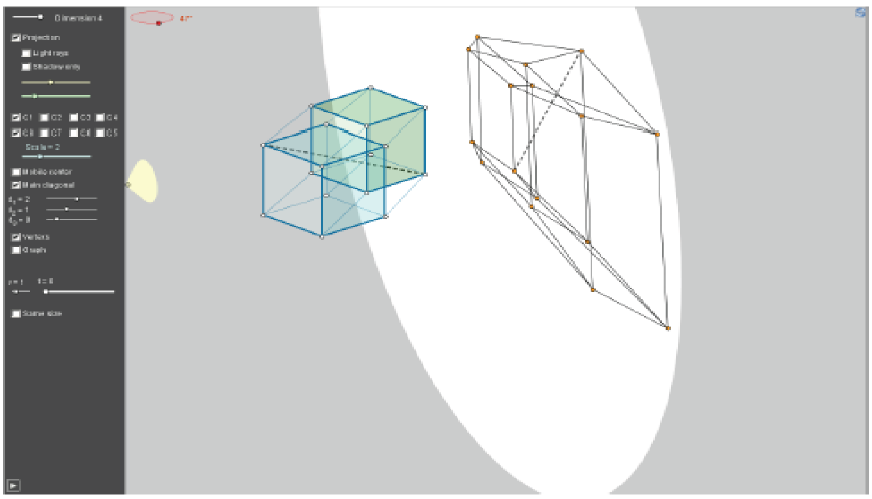
៣. ការប្រសព្វនៃគូប

ការបង្ហាញដោយស្ទាត់ជំនាញនៃគូបមួយមានវិមាត្រ 4 ត្រូវបានឲ្យរូបរាងខុសៗគ្នានៃចំនុប្រសព្វពេលប្លង់មានវិមាត្របីកាត់គ្នា។ ជាដំបូង គេមានគូបមួយ (មានវិមាត្របីក្នុងលំហ) កាត់ប្លង់មួយ នឹងអាចមើលឃើញ។ វាត្រូវបានគេសន្មតថា វត្ថុនេះធ្វើការផ្លាស់ប្តូរទីតាំងដោយល្បឿន (V)។ ជាពិសេសវាមានភាពងាយស្រួល ក្នុងការពិពណ៌នាពីស្ថានភាពនេះនៅពេលគូបមួយ (មានប្រវែង a) ភ្ជាប់ជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ។ ប្លង់មួយមាន $E(t):\ \ x_1+x_2+x_3-\sqrt{3}.v.t=0$ ផ្លាស់ប្តូរតាមអង្កត់ទ្រូងនៃគូបដែលមានល្បឿន (V) តាមរយៈគូបនេះ។ គូបនេះមានរូបរាងប៉ោងដោយខ្លួនឯង។ វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីកំនត់ចំណុចកាត់ជ្រុងគ្រប់ពេល ។ យើងយកផ្នែកដែលកាត់ជាចំណុចប៉ោងនៃចំណុចកាត់ទាំងនេះ។ លំហដែលមានវិមាត្របីកាត់គ្នា។ ពេលដែលមានការផ្លាស់ប្តូរតាមរយៈគូបមានវិមាត្រ 4 នឹងត្រូវបានគេប្រៀបធៀបដូចខាងក្រោម :

គូបមួយមានវិមាត្រ 4 ដែលមានប្រវែងជ្រុង α នឹងត្រូវបានគេអោយកាត់លំហ $R(t)$ ដោយសារការផ្លាស់ប្តូរល្បឿន (v) នៅតាមអង្កត់ទ្រូងនៃគូប។ ដូច្នេះ យើងកំនត់ការប្រៀបធៀបដូចតទៅ:

$$R(t):\quad x_1+x_2+x_3+x_4-2.v.t=0$$

ជាថ្មីម្តងទៀត វាល្មមគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីយល់ថាចំណុចជាច្រើនដែលកាត់គ្នានៃគូបជាមួយប្លង់ R។



៤. កូអរដោនេតាមបែបធរណីមាត្រ

អង្កត់ប្រវែងមួយឯកតាជាគីចាត់ទុកថាជាវិមាត្រមួយ ឬវិមាត្រពីរនៃឯកតាគូប។ ការពិនិត្យមើលកូអរដោនេនៃបន្ទាត់បញ្ឈរក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេមួយ យើងទទួលបានដូចតទៅ :

- អង្កត់មួយមានឯកតា $A_1=(0)$ $A_2=(1)$
- ការេមួយមានឯកតា $A_1=(0|0)$ $A_2=(1|0)$ $A_3=(0|1)$ $A_4=(1|1)$
- គូបមួយមានឯកតា $A_1=(0|0|0)$ $A_2=(1|0|0)$ $A_3=(0|1|0)$ $A_4=(1|1|0)$
  $A_5=(0|0|1)$ $A_6=(1|0|1)$ $A_7=(0|1|1)$ $A_8=(1|1|1)$

តាមរយៈការបូកកូអរដោនេបន្តគ្នាជាមួយមេគុណ 0 និង 1 ដែលជាកូអរដោនេបន្ទាត់បញ្ឈរ។ ការពិចារណា ដែលវត្ថុផ្សំឡើងដោយទំនាក់ទំនងនៃចំនួន $N(n,k)$ មានន័យថា k វិមាត្រ (ជាព្រំដែនគូប) នៃគូបមាន n វិមាត្រ (មើល *e.g. Grauman*, 2009)។ $N(n,k)=\binom{n}{k}.2^{n-k}$ រូបមន្តនេះគេទទួលយកដោយប្រតិបត្តិតាមដូចតទៅ:

1. រាល់វិមាត្រ k (ដែនកំណត់គូប) ស្របបង្លងមានវិមាត្រ k ដែលជាការអនុវត្តន៍តាមដោយរ៉ិចទ័រទូទៅ k នៃគូបមានវិមាត្រ n (មើលផ្នែកទី3)។ វាជាផលវិបាកមួយក្នុងការរកកូអរដោនេនៃបន្ទាត់បញ្ឈរមានវិមាត្រមួយ និងមានវិមាត្រ k (ដែនកំណត់គូប) គឺមានភាពខុសគ្នាតាមរយៈមេគុណ k (និងរាល់កំពូលនីមួយៗរបស់គូប)។
2. មាន $\binom{n}{k}$ ដើម្បីជ្រើសរើសមេគុណ k ចេញពី n។
3. មាន 2^n ដើម្បីជ្រើសរើស (ចាប់ផ្តើមពីកំពូល)។
4. មាន 2^k ចាប់ផ្តើមពីកំពូលទៅដែនកំណត់គូប។

ឧទាហរណ៍ 3: គូបមានវិមាត្រ 3 $(n=3)$

ចំនួនបន្ទាត់បញ្ឈរ $(k=0)$: $N(3,0)=\binom{3}{0}.2^{3-0}=8$

ចំនួនជ្រុង $(k=1)$: $N(3,1)=\binom{3}{1}.2^{3-1}=12$

ចំនួននៃផ្ទៃមុខ $(k=2)$: $N(3,2)=\binom{3}{2}.2^{3-2}=6$

ចំនួននៃគូប $(k=3)$: $N(3,3)=\binom{3}{3}.2^{3-3}=6=1$

ផ្ទៃមុខមានវិមាត្រ K នៃគូបមានវិមាត្រ n: $N=(n,k)=\binom{n}{k}.2^{n-k}$

n\k	0	1	2	3	4	5	...	k	...	n
0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	4	4	1	-	-	-	-	-	-	-
3	8	12	6	1	-	-	-	-	-	-
4	16	32	24	8	1	-	-	-	-	-
5	32	80	80	40	10	1	-	-	-	-
6	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-
7	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-
8	...	...	1792	1792	...	...	...	-	-	-
...								-	-	-
k								1	-	-
...								...	...	-
n	2^n	$n\cdot 2^{n-1}$	$\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}$	...	...	...	...	$\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$	...	1

$N(n,n)=1 \quad N(n,0)=2^n \quad N(3t-1,t-1)=3(3t-1,t) \quad N(n,n-1)=2n \quad n.N(n-1,0)=N(n,t)$

ពណ៌លឿងជាសំខាន់ក្នុងតារាងខាងលើត្រូវបានគេបកស្រាយជាគូបមានវិមាត្រ 0។ ដូច្នេះ រូបមន្តខាងលើត្រឹមត្រូវចំពោះ $n=0$ ។ ចំនួនតគ្នាផ្នែកសំខាន់ស្ថិតក្នុងព៌ណខុសគ្នាដែលគេបកស្រាយដោយប្រើរូបមន្តចំពោះ $N(n,k)$ ខាងលើដូចជា :

- $N(n,n-1)=2n$ (ពណ៌ក្រហម)
- $n.N(n-1,0)=N(n,1)$ (ពណ៌បៃតង)
- ចំពោះ $t\geq 1$, $N(3t-1,t-1)=N(3t-1,t)$ (ពណ៌ខៀវ)

  ម្យ៉ាងទៀតការគិតឃើញត្រូវបានគេផ្តល់អោយដោយគណនាទិន្នន័យដែលគូបមានវិមាត្រ n ជាចំនួនត្រូវគ្នាចំពោះ $(n-1)$ វិមាត្រ។
- $N(n,k)=2.N(n-1,k)+N(n-1,k-1)$ ។

  ឧទាហរ៍ណ 4: សំរាយបញ្ជាក់រូបមន្តខាងលើ

$$\begin{aligned} N(n,k) &= 2.N(n-1,k)+N(n-1,k-1) \\ &= 2\binom{n-1}{k}.2^{2n-1-k}+\binom{n-1}{k-1}.2^{n-1-(k-1)} \\ &= \left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right].2^{(n-k)} = \binom{n}{k}.2^{n-k} \end{aligned}$$

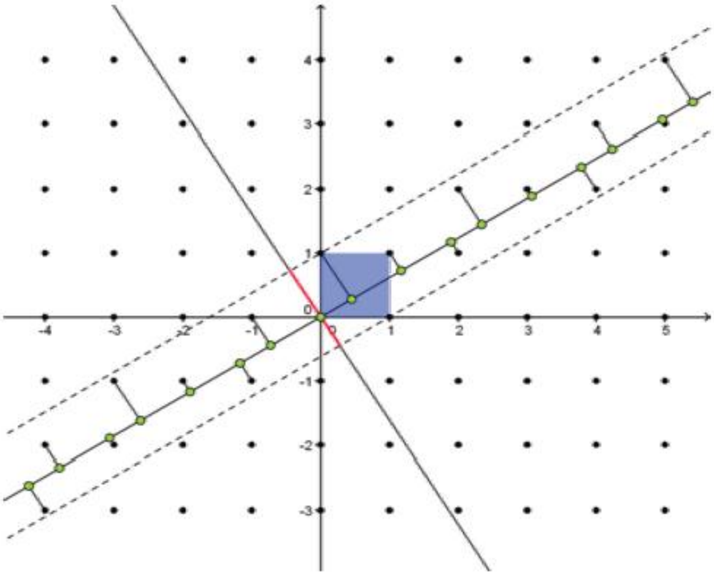
ដូច្នេះ $N(n,k)=N(n,k)$

ជាការពិតណាស់ អំណះអំណាងផ្នែកពិជគណិតទាំងនេះ នឹងអាចជាភាពងាយស្រួលក្នុងការបកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រ និងបំលែងទៅជាផ្នែកធរណីមាត្រ។

៥. *Quasicrystals-Projections from higher dimensions*

ការចាប់ផ្តើមដោយស្មានទុកជាមុនថ្នាក់ផលិកសាស្រ្តតាមលក្ខណៈពិតៗ សំណង់ផលិកសាស្រ្តគឺជាភាពសមគ្នាតាមការបកស្រាយរបស់គេ។ ការបង្ហាញគណិតវិទ្យានៃសំណង់ទាំងនេះអោយបានច្បាស់លាស់ (លក្ខខ័ណ្ឌនៃផលិកសាស្រ្ត) ខាងក្រោមគ្មានការរង្វិលដូចគ្នាតាមលំដាប់ 2, 3, 4 និង 6។ នេះជាភាពត្រូវគ្នាទៅនឹងការសង្កេត ចាប់ពី *Shechtman et al* (1984) បានស្វែងរកសំណង់គ្មានពេលកំនត់ក្នុង *Al-Mn–alloy* ដែលមានរង្វិលជុំវិញ 5 ដង ។ *Crystallographers* ហៅសំណង់ទាំងនេះ *Quasicrystals*។ ដើម្បីកាន់តែច្បាស់បន្ថែមទៀតយើងពិនិត្យឧទាហរណ៍ខាងក្រោមៈ

ឧទាហរណ៍ 5: *Quasicrystals* មានវិមាត្រមួយបន្ទាត់ $g_1:\ y=(T-1).x$ ក្នុង IR^2 ហើយកែងបន្ទាត់ទាំងពីរកាត់គល់អ័ក្សមាន $T=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ យើងគិតថារូបបញ្ជាំងកែងនឹងការវេមួយឯកតាលើបន្ទាត់ g_2 (អង្កត់ពណ៌ក្រហម)។ ជាបន្តទៅទៀត យើងពិនិត្យមើលចំណុចទាំងនោះលើ Z^2 ដែលមានរូបភាពនៅក្រោមការបញ្ជាំងហើយស្ថិតលើបន្ទាត់អង្កត់ពណ៌ក្រហម។ ចំណុចទាំងនេះកែងលើ g_1 (ចំណុចបៃតង)។



រូបភាពទី 6: *Quasicrystals* មានវិមាត្រមួយ

ប្រវែងអង្កត់លើរូបភាពបញ្ចាំងអាចយកតំលៃពីរតែប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ យើងអាចនិយាយបានថា វាជាសំណង់តាមលំដាប់។ តំលៃជាស៊េរីមើលទៅមានច្រើន ឬតិចច្របូកច្របល់គ្នា មិនមានការយល់ដឹងដូចគ្នានោះទេ។ ប៉ុន្តែបើសិនជាយើងពង្រីកជាសាកលដែលមានវិមាត្រពីរនោះ អ្វីៗគ្រប់យ៉ាងវាពិតយល់ច្បាស់។ សំណង់ *Quasicrystals* របស់វាជាផ្នែកមួយនៃរូបភាពបញ្ចាំងនៃក្រឡាផ្ទៃការពិតៗ។ ភាពទូលំទូលាយនៃវិមាត្រមានការយល់ដឹងតិចតួច អំពីសំណង់ *Quasicrystals*។ បញ្ហានេះបានដំណើរការទៅពេញលេញ *Sebechal* (1995) មានការពិពណ៌នារួចហើយ និងសន្និដ្ឋានចំពោះវិធីសាស្ត្ររូបភាពបញ្ចាំង និងវិធីរកក្រឡាផ្ទៃជាច្រើនជាន់ដែលមានសំណើចំណុច *Quasicrystalline*។ ជាឧទាហរណ៍ ក្រឡាផ្ទៃគូបមានវិមាត្រ 5 (Z^5) ជាប្លង់ពិតសំណុំចំណុចដូចមានក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់ខាងលើ។ គេទទួលយក និងអាចត្រូវបានគេឃ្លាំមើល *Quasicrystals* មានវិមាត្រពីរ។ សំណុំចំណុចរបស់វាបង្ហាញពីខ្សែឈរដូច *Penrose–tilling* នៃប្លង់មួយ។

ការសន្និដ្ឋានៈ

យើងបានស្វែងរកមធ្យោបាយពីរបៀបកាងារនៃអ្នកគណិតវិទ្យាដែលពេលខ្លះបានសង្ខេបជារួមជាប្រយោគដូចខាងក្រោម :

" គណិតវិទ្យាធ្វើឲ្យយើងមើលអ្វីដែលមិនឃើញ នឹងអាចមើលឃើញ "

ពេលអ្នកមិនយល់អ្វីមួយអ្នកព្យាយាមផ្លាស់ប្តូរទីកន្លែង។ វាអាចកើតឡើងនូវចំណុចថ្មីផ្សេងទៀតដែលអោយអ្នកអាចពង្រីកចំណេះដឹងបាន។ បញ្ហានេះវាមានរួចមកហើយនូវអ្វីដែលអ្នកព្យាយាមយល់រូបរាងរបស់វា។ អ្នកជ្រើសរើសប្រព័ន្ធអោយស៊ីគ្នាសមរម្យដែលមានសមីការសាមញ្ញ និងបង្ហាញរបស់ណាមួយដែលគេមិនស្គាល់។ សិស្សដែលទទួលបាននូវចំណេះនេះ នឹងធ្វើការងារខាងក្រៅជាមួយនឹងចំណេះដឹងនោះដោយគ្មានការភិតភ័យ ឬក៏ប្រកែកច្រើនដងចំពោះវិមាត្រទាំងនោះទេ។

- ពួកគេនឹងយល់កាន់តែច្បាស់នូវអត្ថន័យនៃវិមាត្រនោះក្នុងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ។
- ពួកគេនឹងយល់ខុសៗគ្នា ទៅតាមលទ្ធភាពនៃដំណើរការវិធានបទនោះ។

- ប្រើភាពស្រដៀងគ្នាដើម្បីវាស់ស្ទង់ចំណេះដឹងអោយបានល្អក្នុងពិភពលោកមានវិមាត្រ 3។
- ប្រើលក្ខណៈប្រធានបទគំនិតអរូបិយក្នុងពិភពលោកនេះអោយមានគំនិតប្រាជ្ញា។
- ធ្វើអោយនឹកឃើញ និងធ្វើដដែលៗនូវចំណេះដឹងរបស់គេអំពីរូបភាពបញ្ចាំងដែលមានវិមាត្រ 3 ក្នុងប្លង់។