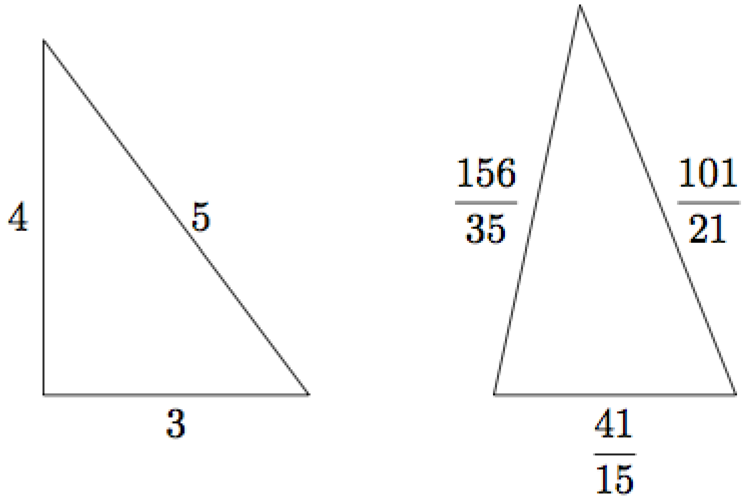
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

Heron triangle* និង *elliptic curves

ប្រសិនបើត្រីកោណពីរមានផ្ទៃក្រឡាដូចគ្នា និងបរិមាត្រដូចគ្នា តើត្រីកោណទាំងពីរនេះចាំបាច់ត្រូវតែដូចគ្នាឬ? ប្រាសមកវិញគឺវាមិនដូចគ្នាទេ។



ឧទាហរហ៍: ត្រីកោណដែលមានជ្រុង 3, 4 និង 5 មានផ្ទៃក្រឡា និង បរិមាត្រដូចគ្នានិងត្រីកោណដែលមានជ្រុង $\frac{41}{15},\frac{101}{21}$ និង $\frac{156}{35}$។ ត្រីកោណទាំងពីរនេះមានបរិមាត្រ 12 គឺ៖

$$3+4+5=12 \text{ និង } \frac{41}{15}+\frac{101}{21}+\frac{156}{35}=\frac{287+505+468}{105}=\frac{1260}{105}=12$$

គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា ត្រីកោណទាំងពីរនេះក៏មានក្រឡាផ្ទៃដូចគ្នាដែរ។ ត្រីកោណកែងដែលមានក្រឡាផ្ទៃ $\frac{1}{2}4\cdot 3=6$។ ដើម្បីរកក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណផ្សេងទៀត យើងត្រូវប្រើរូបមន្ត *Heron* ដែលតាងដោយ A ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុង a,b និង c ឱ្យដោយរូបមន្ត៖

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

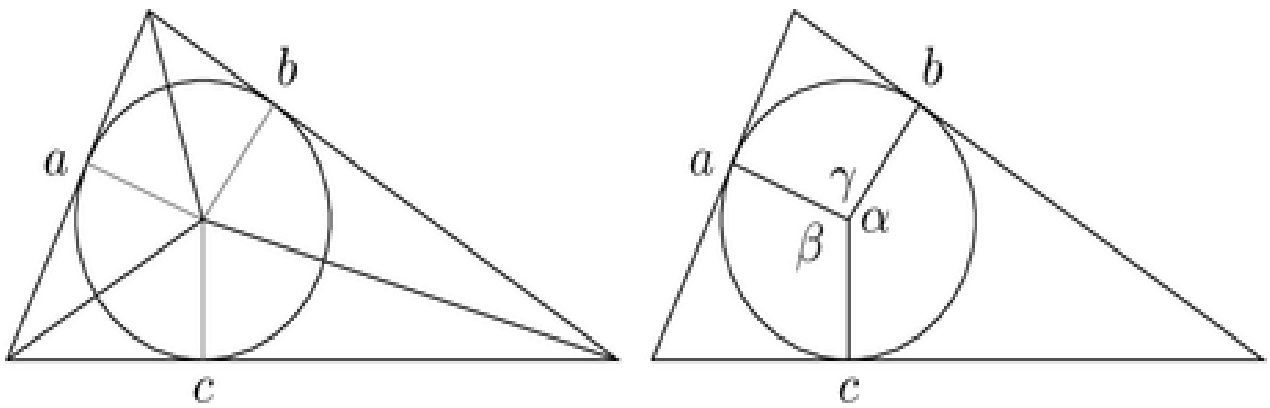
ដែល $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ គឺជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ។ តាមរយៈរូបមន្តនេះបង្ហាញឱ្យយើងឃើញក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណទីពីរក៏ស្មើ 6 ដែរ។

លំហត្រីកោណ

តើយើងអាចរកឧទាហរណ៍លំហត្រីកោណបានដោយរបៀបណា? ដើម្បីរកឧទាហរណ៍បែបនេះ យើងមានមធ្យោបាយដ៏ត្រឹមត្រូវមួយ គឺការតាងលំហត្រីកោណទាំងអស់។ មានច្រើនរបៀបដែលយើងអាចអនុវត្តលើឧទាហរណ៍នេះបាន។ របៀបទីមួយ គឺតាងត្រីកោណដែលមានជ្រុងបី (a,b,c) ដែលប្រវែងជ្រុងទាំងបីរបស់វាគឺទៅតាមលំដាប់លំដោយ។ តាមរបៀបនេះ យើងតាងត្រីកោណមួយដោយចំនុចបីនៅក្នុងលំហ។ ហើយយើងត្រូវចងចាំថា គ្រប់ចំណុចទាំងអស់ត្រូវស្របទៅនឹងត្រីកោណ។

ឧទាហរណ៍: គ្រប់កូអរដោនេទាំងអស់ត្រូវតែវិជ្ជមាន។ តើអ្នកគិតថាមានការកំណត់ផ្សេងទៀតដែរឬទេ? មានច្រើនរបៀបផ្សេងទៀតក្នុងការដៅកូអរដោនេនៅលើលំហត្រីកោណដោយប្រើមុំជំនួសឱ្យប្រវែងរបស់វាវិញ ។ គ្រប់ត្រីកោណដែលមានរង្វង់ចារឹកក្នុងហើយមាន r ជាកាំនៃរង្វង់ដែលមាទំនាក់ទំនងជាមួយនឹងក្រឡាផ្ទៃ A និងកន្លះបរិមាត្រ s គឺ $A=rs$។

ដើម្បីបង្ហាញថា $A=rs$ ពិត យើងត្រូវគូសបន្ទាត់ដែលចេញពីផ្ចិតនៃរង្វង់ ហើយកែងទៅនឹងជ្រុងនៃត្រីកោណ ដូចដ្យាក្រាមខាងឆ្វេងក្នុងរូបភាពទី 2។ ដែលចំណោលកែងទាំងនោះគឺជាកម្ពស់នៃត្រីកោណតូចៗបីដែលមានបាតគឺជាជ្រុងនៃត្រីកោណធំ និងមានកំពូលជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ។ បូកក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណទាំងនោះ យើងទទួលបាន $A=rs$ ។



រូបភាពទី 2: លំហត្រីកោណប៉ារ៉ាម៉ែត

សមីការ $A=rs$ នេះបង្ហាញអោយយើងឃើញថា ប្រសិនបើ ត្រីកោណពីរមានក្រឡាផ្ទៃដូចគ្នា និងកន្លះបរិមាត្រដូចគ្នានោះកាំ r នៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណក៏ដូចគ្នាដែរ។ ដូច្នេះ បើយើងក្រឡេកមើលត្រីកោណទាំងពីរ យើងនឹងអាចរកបានត្រីកោណមួយក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំងអស់ ដែលនៅជុំវិញរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ដែលស្ថិតនៅចម្ងាយស្មើៗគ្នានៃរង្វង់។ យើងនឹងប្រើប្រាស់មុំដែលផ្គុំដោយកាំទាំងបីនៃរង្វង់ជំនួសអោយការប្រើប្រាស់ប្រវែង ដើម្បីពិពណ៌នាពីត្រីកោណទាំងនោះ ដូចដ្យាក្រាមខាងស្តាំក្នុងរូបភាពទី 2។

ត្រីកោណប៉ារ៉ាម៉ែត្រដែលមានក្រឡាផ្ទៃ និងបរិមាត្រថេរ

ក្នុងលំហាត្រីកោណ យើងអាចរកខ្សែកោងដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងគ្រួសារនៃត្រីកោណដែលមានតម្លៃដូចគ្នាទៅនិងក្រឡាផ្ទៃ A និងកន្លះបរិមាត្រ s។

ជំហានទី 1 យើងបង្ហាថា s គឺជាអនុគមន៍នៃមុំ α,β និង γ ហើយ r ជាកាំនៃរង្វង់។ កាំ និងបន្ទាត់ដែលគូសចេញពីកំពូលទៅនឹងផ្ចិតនៃរង្វង់បានចែកត្រីកោណជា 6 ត្រីកោណកែង។ ព្រោះបន្ទាត់ដែលគូសចេញពីកំពូលទៅផ្ចិតនៃរង្វង់ គឺជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃត្រីកោណធំដែលត្រីកោណកែងទាំងនេះ គឺជាត្រីកោណដូចគ្នាពីរៗ។ យកប្រវែងបាតមួយៗចេញពីគូនៃត្រីកោណនីមួយៗ ហើយបូកបញ្ចូលគ្នា យើងបាន៖

$$s=r(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2})$$

សមីការ $s=r(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2})$ និងសមីការ $A=rs$ ទាំងពីរនេះបង្ហាញអោយយើងឃើញថា ប្រសិនបើ ក្រឡាផ្ទៃ A និងកន្លះបរិមាត្រ s គឺជាចំនួនថេរ នោះគេបានផលបូកនៃតង់សង់គឺ

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{s^2}{A} \qquad (1)$$

ជំហានទី 2 យើងបកស្រាយលក្ខខណ្ឌនេះនៅក្នុងនិយមន័យនៃសមីការខ្សែកោងនៅក្នុងប្លង់។

តាង $x=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), y=\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$ និង $z=\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ ដែល $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ យើងបាន៖

$$\frac{\gamma}{2}=\pi-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$$

ដូច្នេះ $z=\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=-\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{x+y}{1-xy}$

ដូចនេះ ប្រសិនបើ k គឺជាចំនួនថេរ $\frac{s^2}{A}$ សមីការ (1) ក្លាយជាសមីការកំណត់ដោយ k

$$x+y-\frac{x+y}{1-xy}=k \qquad (2)$$

ដែលយើងអាចសរសេរបានជា

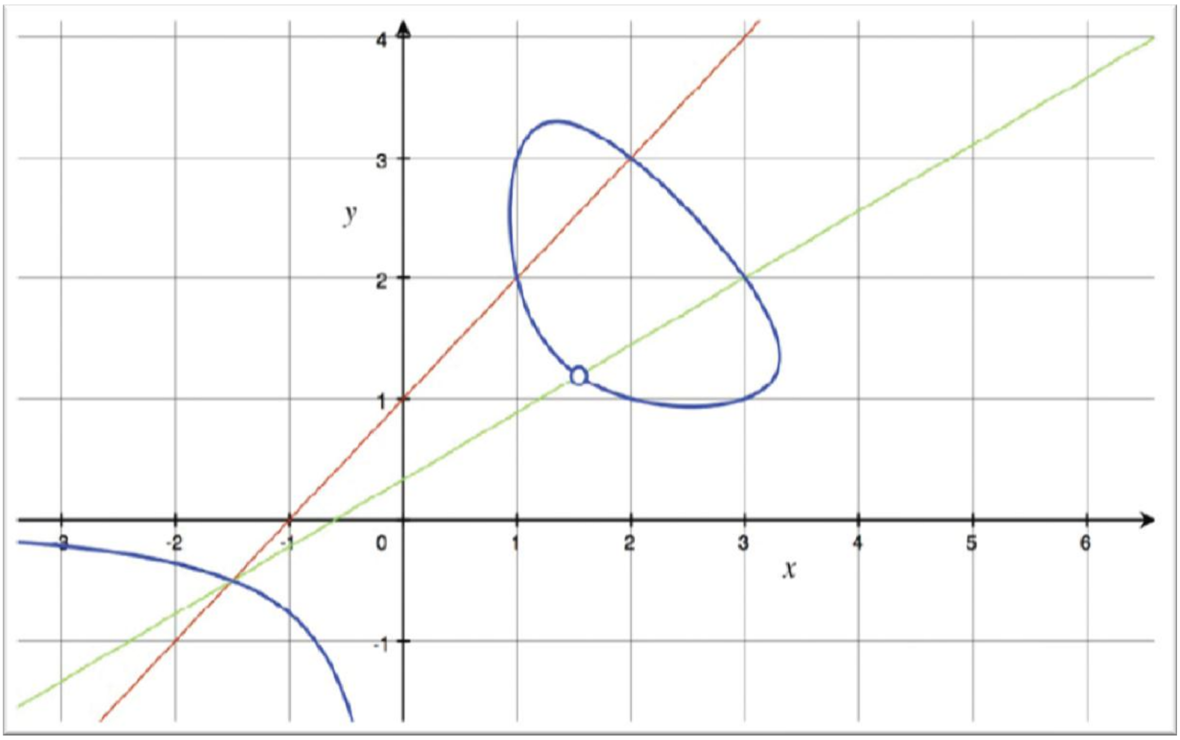
$$x^2y+xy^2=kxy-k \qquad (3)$$

គ្រប់ត្រីកោណដែលមានក្រឡាផ្ទៃ A និងកន្លះបិរមាត្រ s កំនត់ដោយចំណុចនៅលើខ្សែកោង ហើយគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោង គឺជាតំបន់ពិតប្រាកដនៃប្លង់ត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រីកោណ។ តំបន់ដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រីកោណដែល

បង្ហាញយ៉ាងច្បាស់នៅក្នុងរូបភាពទី 2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយមុំ $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ ដែល $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$ ដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងតំបន់ $x>0$, $y>0$ និង $xy>1$ ព្រោះ $(z>0)$ ក្នុងរូបភាពទី 3 បង្ហាញពីខ្សែកោង $x^2y+xy^2=kxy-k \ if \ k=6$ ដែលមានតម្លៃត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រីកោណដែលមានជ្រុង 3, 4 និង 5។ គ្រប់ចំណុចដែលផ្សំគ្នានៅលើខ្សែកោង គឺជាការវេជ្ជមាន ដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រីកោណ ដែលប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណគឺ៖

$$a=x+y \,, b=y+z \text{ និង } c=z+x$$

ជាពិសេស ចំណុច $(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3)$ និង $(3,1)$ ត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រីកោណដែលមានជ្រុង 3, 4 និង 5 ដែលជ្រុងនីមួយៗបង្កើតបានគូកូអរដោនេផ្សេងៗគ្នា។



រូបភាពទី 3: ខ្សែកោងត្រីកោណប៉ារ៉ាម៉ែត្រដែលមានបរិមាត្រ 12 និងក្រឡាផ្ទៃ 6

ការស្វែងរកចំនុចនៅលើខ្សែកោង

ដោយខ្សែកោងក្នុងរូបភាពទី3 គឺត្រូវបានរកដោយប្រើសមីការដឺក្រេទី 3 យើងអាចរកចំណុចនៅលើវាដោយប្រើវិធីតង់សង់ និង *Secants*។ ចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោងកំនត់ *Secants* ដែលកាត់ខ្សែកោងច្រើនជាងមួយ រកគ្រប់ចំនុចដើម្បីដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 3 អញ្ញាត x។ ដែលឬសពីរទៀតរបស់វាត្រូវបានគេស្គាល់។ ដែលយើងមាន 6 ចំណុចនៅលើខ្សែកោងរួចមកហើយ មានមធ្យោបាយជាច្រើនដែលអាចកើតមានសំរាប់ *Secants*។ បើយើងបង្កើតចំណុចកាន់តែច្រើនធ្វើអោយយើងមានធ្យោបាយកាន់តែច្រើន។ ជាការពិតណាស់ខ្សែកោងដែលមានចំនុចច្រើនរាប់មិនអស់ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន។ ទំរង់ទី 2 នៃ *Secants* បានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី 3 ដោយចំនុច (54/35, 25/21) ដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រីកោណដែលមានជ្រុង41/51, 101/21 និង 156/35។

ទំរង់ *Secants* អនុវត្តន៍ចំពោះសមីការខ្សែកោងដឺក្រេទី 3 ផ្សេងទៀតនៅក្នុងប្លង់ ដែលខ្សែកោងនោះត្រូវបានគេហៅថា ខ្សែកោងអេលីប (មិនថាខ្សែកោងគឺជាអេលីបខ្លួនឯងនោះទេ ប៉ុន្តែពួកវាកើតមានឡើងនៅពេលដែលយើងធ្វើការសិក្សាស៊ីជម្រៅទៅលើអនុគមន៍កុំផ្លិច ដែលយើងហៅថា អនុគមន៍អេលីប)។ ទម្រង់ *Secants* ខាងក្រោម គឺជាវិធីមួយដើម្បីរកក្រុមមួយនៃទម្រង់នៅលើសំណុំនៃចំណុចសនិទាននៅលើខ្សែកោងអេលីបមួយ (នោះគឺជាចំណុចដែលមានកូអរដោនេជាសំណុំចំនួនសនិទាន)។

ការសិក្សាលើខ្សែកោងនៃអេលីប គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះមួយនៃការស្រាវជ្រាវទ្រឹស្តីចំនួន។ ដែលគេអនុវត្តន៍នៅក្នុងគ្រោងការ *Cryptographic* និងការពារសុវត្ថិភាពហិរញ្ញវត្ថុនៅក្នុងគេហទំព័រ។ ខ្សែកោងអេលីបដើរតួនាទីយ៉ាងសំខាន់ក្នុងការដោះស្រាយទ្រឹស្តីបទ *Fermat's Last*។

រឿងរ៉ាវដែលបានពិពណ៌នានៅក្នុងអត្ថបទនេះ បង្ហាញពីភាពអស្ចារ្យនៃគណិតវិទ្យាដែលវាចាប់ផ្តើមធ្វើការស្រាវជ្រាវ និងបញ្ចប់នៅថ្នាក់វិទ្យាល័យ។ អស់រយៈពេលជាច្រើនឆ្នាំមកហើយដែលយើងបានបញ្ចូលគំនិតសំខាន់ៗនេះនៅក្នុងគណិតវិទ្យាទំនើប ដូចជាគំនិតនៃការដោះស្រាយបញ្ហាអំពីផ្ទៃកពិសេសនៃត្រីកោណ (ជាឧទាហរណ៍៖ ត្រីកោណដែលមានក្រឡាផ្ទៃ 6 និងបរិមាត្រ 12) ជាទូទៅត្រីកោណស្ថិតនៅក្នុងលំហ (លំហត្រីកោណទាំងអស់) ហើយនិងការស្វែងរកមធ្យោបាយត្រឹមត្រូវមួយនៃត្រីកោណប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។